

## ОБ АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЛУЧЕНИЯ ПО ОТРАЖАТЕЛЮ АНТЕННЫ ПЕРЕМЕННОГО ПРОФИЛЯ КРИВЫМИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

*В. М. Спитковский*

Исследуется возможность аппроксимации алгебраическими кривыми третьего порядка экспериментальных распределений амплитуд электромагнитного поля по отражателю антенны переменного профиля. Определение классов аппроксимирующих кривых произведено с применением аппарата пространственных матриц и инвариантов кубических трилинейных форм.

A possibility of approximation of electromagnetic field amplitudes over the reflector of a variable profile antenna by the algebraic curves of the third order is investigated. The classes of approximating curves were determined using the spatial matrices and invariants of cubic three-linear forms.

В связи с созданием весьма крупных антенных систем стали уделять большое внимание точному определению их расчетных параметров. Расчеты должны выполняться с учетом схемы облучения отражателя системой первичный облучатель — вторичное зеркало и обеспечивать точность один—два процента.

На Большом пулковском радиотелескопе (БПР) проведена серия экспериментов [1—4] по определению характера облучения отражателя антенны переменного профиля (АПП) на различных длинах волн (от 3.04 до 6.6 см) и с различными типами первичных облучателей. Измерения, проведенные разными методами, хорошо коррелируют между собой, а будучи редуцированы за тип первичного облучателя — хорошо согласуются с расчетом [5], проведенным без учета дифракционных явлений. Для целей аппроксимации распределения облучения по отражателю АПП некоторыми кривыми строилось усредненное распределение амплитуды поля по данным всех экспериментов, редуцированным к одной дате. Результаты измерений обрабатывались как неравноточные, так что каждая точка аппроксимируемой в дальнейшем кривой была получена как вероятнейшее значение измеренной величины — весовое среднее [6]. Построенные указанным способом усредненные характеристики облучения по высоте отражающего элемента —  $F_1(h)$  — и вдоль главного зеркала АПП —  $F_2(N)$  показаны на рис. 1.

Подобные распределения часто встречаются при расчетах диаграмм направленности и интегральных параметров АПП (коэффициента использования площади, коэффициента направленного действия, апертурного коэффициента и др.) [4, 7, 8]. Функции  $F_1(h)$  и  $F_2(N)$  входят в расчетные формулы чаще всего как подынтегральные выражения, причем имеет место равенство

$$\int_S \int F_0(h, N) dh dN = \int_0^H F_1(h) dh \int_{-N/2}^{+N/2} F_2(N) dN, \quad (1)$$

где  $F_0(h, N)$  — двумерная функция распределения облучения по отражателю,  $S$  — площадь апертуры,  $N$  — число отражающих элементов (щитов) АПП,  $H$  — высота отражающего элемента,  $0 \leq h \leq H$ .

Для получения численных результатов по формуле (1) с необходимой точностью следует найти соответствующие аппроксимации для экспериментальных распределений  $F_1(h)$  и  $F_2(N)$ .

Для традиционно сложившихся типов апертурных антенн, возбуждаемых симметрично относительно центра, необходимые аппроксимирующие кривые подробно описаны в литературе [9—11]. Большие антенны типа БПР не имеют центральной симметрии характеристик облучения по двум

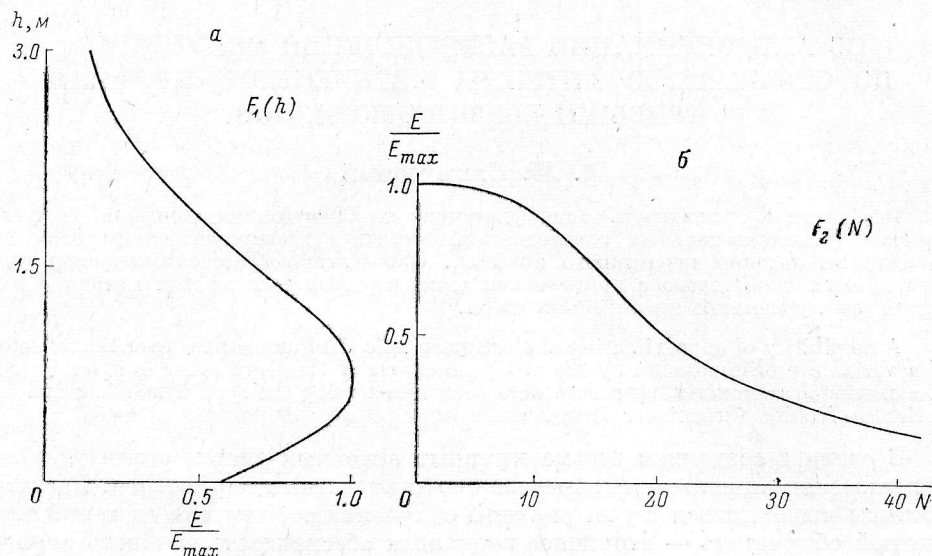


Рис. 1. Аппроксимируемые экспериментальные распределения поля по отражателю антенны переменного профиля.

а — по высоте отражающего элемента (щита); б — вдоль главного зеркала по горизонтали.

основным причинам: 1) геометрические оси первичного облучателя, вторичного зеркала и отражателя переменного профиля не совпадают между собой, 2) форма синфазного раскрыва у АПП, вообще говоря, не обладает центральной симметрией. Поэтому аппроксимации, приводимые в [9, 10], при численных оценках в применении к АПП дают большие погрешности, порядка 20%, что в настоящее время неприемлемо при проектировании и строительстве больших антенн. Для обеспечения требуемой точности порядка нескольких процентов необходимо решить задачу об аппроксимации распределения амплитуды поля по отражателю АПП, исходя из следующих предпосылок.

Во-первых, типы применяемых первичных облучателей и схема облучения отражателя АПП обеспечивают непрерывность и ограниченность распределения на отрезке, определяемом рассматриваемым сечением апертуры, если не принимать во внимание дифракционных явлений на границах щитов [9, 10, 12—15]. Во-вторых, рассматриваемые распределения не являются периодическими зависимостями. Поэтому, согласно первой теореме Вейерштрасса [16], аппроксимирующие функции следует искать среди алгебраических многочленов  $P(x, y)$ .

В общем случае уравнение для  $P(x, y)$ , освобожденное от дробей и радикалов, записывается в декартовой системе координат следующим образом:

$$\begin{aligned}
& A_0 x^n + A_1 x^{n-1} y + A_2 x^{n-2} y^2 + \dots + A_n y^n + \\
& + B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} y + \dots + B_{n-1} y^{n-1} + \\
& + C_0 x^{n-2} + \dots + C_{n-2} y^{n-2} + \dots + \\
& + L_0 x + L_1 y + M = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Для нахождения аппроксимирующих функций надо определить степень многочлена (2), для чего воспользуемся методом последовательных разностей [17]. Если  $y=f(x)$  — эмпирическая зависимость, то, составляя последовательные разности

$$\begin{aligned}
& \Delta y^n, \Delta^2 y^n, \dots, \Delta^m y^n, \\
& m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \tag{3}$$

можно определить степень  $n$  аппроксимирующего многочлена. В (3) индексы при  $\Delta$  означают порядок разности. Критерием для определения  $n$  является постоянство разности  $m$ -го порядка для  $y^n$  при  $m=n$ , т. е.

$$\Delta^n y^n = \text{const}(x). \tag{4}$$

Для исследуемых распределений (см. рис. 1) указанные разности были составлены для кривых, построенных по средним значениям измерений на всех длинах волн (3.04, 3.2 и 4.5 см). При этом отклонение от константы составило менее 1% уже при  $n=3$ . Следовательно, заданная точность вычислений обеспечивается аппроксимацией экспериментальных зависимостей кривыми третьего порядка

$$\begin{aligned}
& Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + \\
& + 3Gy^2 + Hx + Ly + K = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

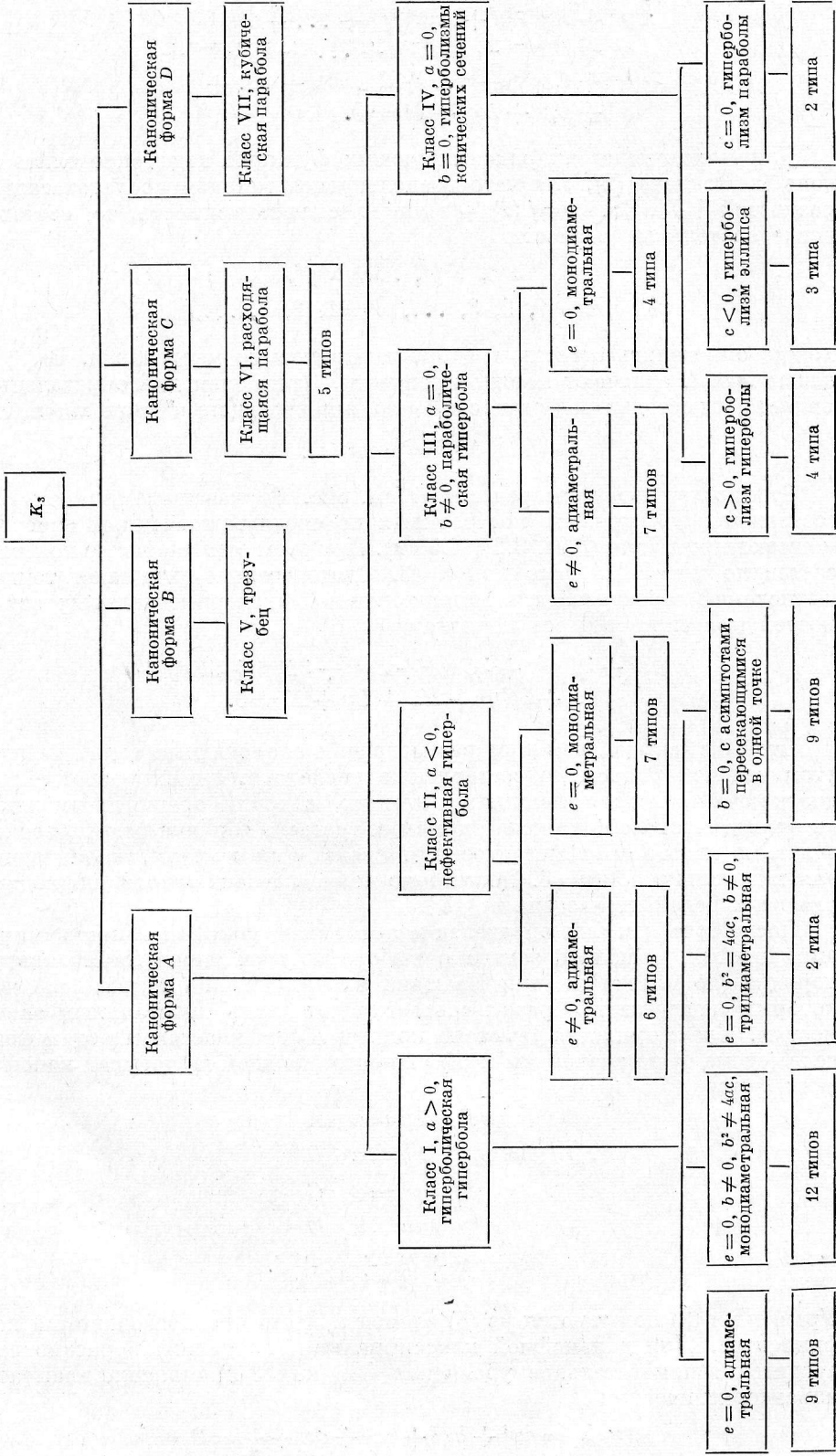
Чтобы в дальнейшем при рассмотрении аналогичных задач избежать утомительной работы по составлению последовательных разностей, для диагностики экспериментальных кривых, с точки зрения возможности их аналитического выражения кривыми третьего порядка, можно воспользоваться некоторыми метрическими свойствами кривых, характерными для них только при  $n=3$ . Достаточно полная сводка теорем, подходящих для этих целей, приведена в [18].

После того как был определен необходимый порядок аппроксимирующих кривых, решалась задача о выборе из всех типов линий третьего порядка (по классификации Ньютона их 79 [18, 19]) таких, уравнения которых наилучшим образом соответствуют экспериментальным зависимостям. Классификация Ньютона кривых  $K_3$  по классам и родам проведена (схема 1) по значениям коэффициентов каждой из четырех канонических форм

$$\begin{aligned}
xy^2 + ey &= \alpha & A \\
xy &= \alpha & B \\
y^2 &= \alpha & C \\
y &= \alpha & D \\
\alpha &= ax^3 + bx^2 + cx + d.
\end{aligned} \tag{6}$$

Уравнения (6) получаются из (5) элементарными преобразованиями коэффициентов. Для дальнейшей классификации (по типам) в рассмотрение вводится вспомогательное уравнение 4-й (или 3-й) степени, называемое характеристическим

$$\lambda_1 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} = 0 \tag{7}$$



или

$$\lambda_2 = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (7a)$$

Тип кривой определяется только в зависимости от различных соотношений между корнями характеристического уравнения. В общем случае кривая  $K_3$  может иметь действительные и мнимые прямолинейные асимптоты, криволинейные асимптоты, точки возврата, кратные точки, изолированные точки; одна или несколько ветвей, составляющих кривую, могут иметь различный рисунок.

Анализ кривых третьего порядка может быть выполнен с помощью трехмерных пространственных матриц третьего порядка и сопоставляемых с ними линейных форм [20].

Трехмерной, или кубической, матрицей  $n$ -го порядка над  $P$  называется система из  $n^3$  элементов  $A_{ijk}$  ( $i, j, k=1, 2, \dots, n$ ) поля  $P$ , расположенных в точках трехмерного пространства, определяемых координатами  $i, j, k$  (рис. 2)

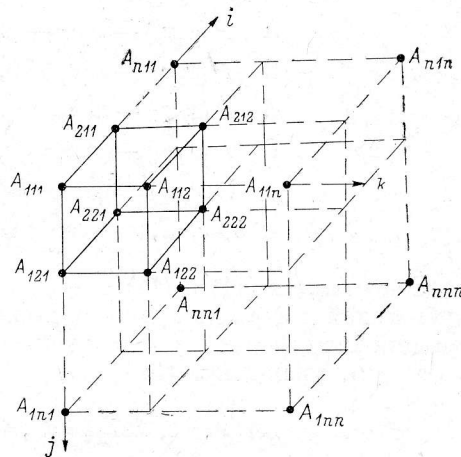


Рис. 2. Структура пространственной матрицы.

$$A = \|A_{ijk}\| \quad (i, j, k=1, 2, \dots, n).$$

Кубическая матрица 3-го порядка записывается с помощью сечений ориентации ( $i$ ) следующим образом [20]:

$$A = \begin{array}{c} \rightarrow i \\ \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} A_{111} & A_{112} & A_{113} & A_{211} & A_{212} & A_{213} & A_{311} & A_{312} & A_{313} \\ A_{121} & A_{122} & A_{123} & A_{221} & A_{222} & A_{223} & A_{321} & A_{322} & A_{323} \\ A_{131} & A_{132} & A_{133} & A_{231} & A_{232} & A_{233} & A_{331} & A_{332} & A_{333} \end{array} \right\| \\ \downarrow j \\ \leftarrow k \end{array} \quad (8)$$

Здесь стрелки указывают направления, в которых возрастают соответствующие индексы.

Для плоской линии третьего порядка соответствующей линейной формой будет кубическая трilinearная форма

$$f = \sum_{i, j, k=1}^n A_{ijk} x_1 x_2 x_3 = 0, \quad (9)$$

сопоставляемая с симметрической кубической матрицей. Условие симметричности кубической матрицы записывается так:

$$A_{ijk} = A_{ikj} = A_{jki} = A_{jik} = A_{kij} = A_{kji}. \quad (10)$$

Переменные  $x_1, x_2, x_3$  в (9) следует рассматривать как проективные координаты. Учитывая (9) и (10), уравнение кривой  $K_3$  в проективных однородных координатах запишется в виде

$$\begin{aligned} K_3 = & A_{111}x_1^3 + 3A_{112}x_1^2x_2 + 3A_{113}x_1^2x_3 + 3A_{122}x_1x_2^2 + \\ & + 6A_{123}x_1x_2x_3 + 3A_{133}x_1x_3^2 + A_{222}x_2^3 + 3A_{223}x_2^2x_3 + \\ & + 3A_{233}x_2x_3^2 + A_{333}x_3^3 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Запись уравнения линии в проективных однородных координатах упрощает вычисления при анализе форм кривых. Прямой и обратный переходы от декартовой к однородной системе координат подробно изложены в [18] и [19]. Выполнив необходимые действия, ньютоновы формы (6) кривых третьего порядка можно записать в однородных координатах следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \text{A} \quad & P(x_1x_3) - x_1x_2^2 - ex_2x_3^2 = 0, \quad a \neq 0, \quad a = 0, \\
 \text{B} \quad & P(x_1x_3) - x_2^2x_3 = 0, \quad a \neq 0, \\
 \text{C} \quad & P(x_1x_3) - x_1x_2x_3 = 0, \quad a \neq 0, \\
 \text{D} \quad & P(x_1x_3) - x_2^2x_3 = 0, \quad a \neq 0, \\
 & P(x_1x_3) = ax_1^3 + bx_1^2x_3 + cx_1x_3^2 + dx_3^3, \\
 & a, b, c, d, e \text{ — вещественные числа.}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Сопоставляя (11) и (12), получаем для коэффициентов симметрической кубической матрицы третьего порядка, ассоциированной с кубической трилинейной формой  $f$ , следующие результаты:

а) для уравнения (12А)

$$\begin{aligned}
 A_{111} = a, \quad 3A_{112} = 0, \quad 3A_{113} = b, \quad 3A_{122} = -1; \\
 6A_{123} = 0, \quad 3A_{133} = c, \quad A_{222} = 0, \quad 3A_{223} = 0, \\
 3A_{233} = -e, \quad A_{333} = d;
 \end{aligned} \tag{13А}$$

б) для уравнения (12В)

$$\begin{aligned}
 A_{111} = a, \quad 3A_{112} = 0, \quad 3A_{113} = b, \quad 3A_{122} = 0, \\
 6A_{123} = 0, \quad 3A_{133} = c, \quad A_{222} = 0, \quad 3A_{223} = -1, \\
 3A_{233} = 0, \quad A_{333} = d;
 \end{aligned} \tag{13В}$$

в) для уравнения (12С)

$$\begin{aligned}
 A_{111} = a, \quad 3A_{112} = 0, \quad 3A_{113} = b, \quad 3A_{122} = 0, \\
 6A_{123} = -1, \quad 3A_{133} = c, \quad A_{222} = 0, \quad 3A_{223} = 0, \\
 3A_{233} = 0, \quad A_{333} = d;
 \end{aligned} \tag{13С}$$

г) для уравнения (12D)

$$\begin{aligned}
 A_{111} = a, \quad 3A_{112} = 0, \quad 3A_{113} = b, \quad 3A_{122} = 0, \\
 6A_{123} = 0, \quad 3A_{133} = c, \quad A_{222} = 0, \quad 3A_{223} = 0, \\
 3A_{233} = -1, \quad A_{333} = d.
 \end{aligned} \tag{13D}$$

Окончательно, каноническим формам (12) соответствуют следующие симметрические кубические матрицы:

а) канонической форме А

$$A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 a & 0 & \frac{b}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{c}{3} & 0 & \frac{c}{3} \\
 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{e}{3} \\
 \frac{b}{3} & 0 & \frac{c}{3} & 0 & 0 & -\frac{e}{3} & \frac{c}{3} & -\frac{e}{3} & d
 \end{array} \right\|; \tag{14}$$

б) канонической форме В

$$A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & \frac{b}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{3} & 0 & \frac{c}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{b}{3} & 0 & \frac{c}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{c}{3} & 0 & d \end{array} \right\|; \quad (15)$$

в) канонической форме С

$$A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & \frac{b}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{b}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{c}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{b}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{c}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{c}{3} & 0 & d \end{array} \right\|; \quad (16)$$

д) канонической форме D

$$A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & \frac{b}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{3} & 0 & \frac{c}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{b}{3} & 0 & \frac{c}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{c}{3} & -\frac{1}{3} & d \end{array} \right\|. \quad (17)$$

По элементам симметрических кубических матриц (14)—(17) могут быть вычислены основные инварианты Аронгольда  $S(A_{ijk})$  и Сальмона  $T(A_{ijk})$  кривой третьего порядка  $K_3$  [18] и далее необходимые для отбора аппроксимирующих кривых инвариант Сильвестра  $R$  и абсолютный инвариант  $I$ , вычисляемые по  $S(A_{ijk})$  и  $T(A_{ijk})$  соответственно по формулам

$$\begin{aligned} R &= S^3 + T^2, \\ I &= \frac{R}{T^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из кривых, анализируемых с точки зрения применения к задаче аппроксимации экспериментальных распределений, прежде всего должны быть исключены те, которые имеют особые точки, в том числе и бесконечно удаленные. Для выявления таких кривых могут служить следующие значения абсолютного инварианта:

$$I = 0 \text{ или } I = \frac{0}{0}. \quad (19)$$

По этому признаку из рассмотрения должны быть исключены кривые (12В) и (12D), соответствующие классам V (трезубцы) и VII (кубические параболы) по классификации Ньютона.

Уравнение (12С) описывает расходящиеся параболы (класс VI), для которых инвариант  $I$  может в зависимости от значений коэффициентов  $a, b, c, d$  принимать любое значение. Однако общая тенденция кривых этого класса — возрастать с ростом  $x$ , что хорошо видно из тривиального соотношения (в декартовой системе координат):

$$y = \pm \sqrt{ax},$$

для вещественной плоскости  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \pm \infty$ , что очевидно не соответствует характеру рассматриваемых распределений.

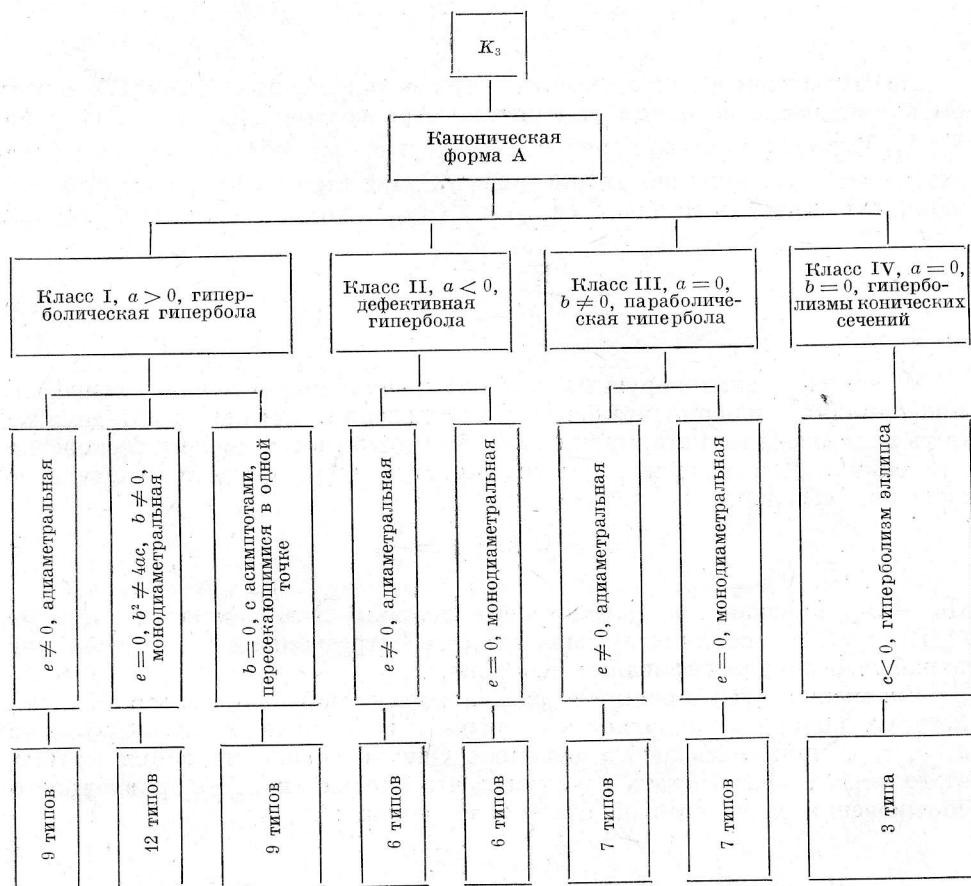
Итак, из четырех канонических форм кривых третьего порядка на вещественной плоскости осталась только одна, а именно: каноническая форма А из (6) и (12) в декартовой и однородной системах координат соответственно. В явном виде уравнение этой совокупности линий третьего порядка имеет вид

$$y = \frac{1}{2x} [-e \pm 2\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}], \quad (20)$$

где  $x_1, x_2, x_3, x_4$  — корни уравнения (7). Для этих кривых  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = \pm \frac{\infty}{\infty}$ , поэтому необходим дальнейший анализ форм кривых. Для классов I, II, III (схема 1) инвариант  $I$  может иметь любое значение, в связи с чем необходимо рассмотреть дополнительные соотношения значений инвариантов: при  $R=0, S \neq 0$  кривая  $K_3$  имеет узловую точку для  $T < 0$  или изолированную для  $T > 0$ ; при  $T=S=R=0$  кривая имеет точку возврата. Для гиперболизмов параболы  $I = \frac{0}{0}, T=S=R=0$ , а для гиперболизмов гиперболы  $I=0, R=0, S \neq 0, T < 0$ , следовательно, и эти роды кривых класса IV оказываются непригодными для аппроксимации.

Пригодные для аппроксимации классы и роды кривых  $K_3$  приведены на схеме 2.

СХЕМА 2





В заключение можно сказать, что аппарат пространственных матриц и соответствующих им инвариантов трilinearной кубической формы дает эффективные результаты при отборе аппроксимирующих кривых по крупным подразделениям классификации — каноническим формам и классам. В отношении более мелких подразделений классификации — родов и типов кривых  $K_3$  — метод менее чувствителен. Так, например, представляется возможным использовать для аппроксимации гиперболизмы эллипса ( $I=0, R=0, S \neq 0, T > 0$ ), что, однако, не следует из рассмотрения используемой нами группы инвариантов.

Анализ родов и типов кривых  $K_3$  с целью нахождения конкретных форм для аппроксимирующих кривых следует выполнять, исходя из максимального соответствия геометрического образа аппроксимирующей кривой заданному экспериментальному распределению поля по отражателю АПП.

#### Литература

1. В. Н. Боровик, Н. Г. Петерова, В. М. Спитковский, Г. М. Тимофеева, Изв. Гл. астроном. обс. в Пулкове, № 187 (в печати).
2. Г. Б. Гельфрейх, В. М. Спитковский, Астрофиз. иссл. (Изв. САО), 1, 82, 1969.
3. В. М. Спитковский, наст. сборник, стр. 174.
4. В. М. Спитковский, Изв. Гл. астроном. обс. в Пулкове, № 187 (в печати).
5. В. М. Спитковский, Астрофиз. иссл. (Изв. САО), 1, 68, 1969.
6. П. И. Шилов. Способ наименьших квадратов. Геодезиздат, 1941.
7. С. Э. Хайкин, Н. Л. Кайдановский, Н. А. Есепкина, О. Н. Шиврис, Изв. Гл. астроном. обс. в Пулкове, XXI, № 164, 1960.
8. Н. А. Есепкина, Н. Л. Кайдановский, Б. Г. Кузнецов, Г. В. Кузнецова, С. Э. Хайкин, «Радиотехника и электроника», № 12, 1961.
9. Антенны сантиметровых волн. Под ред. Я. И. Фельда, изд. «Советское радио», 1950.
10. Р. Кюн. Микроволновые антенны. Изд. «Судостроение», 1967.
11. К. Бенфорд. Теория прожектора. ОНТИ, 1935.
12. Д. Саусворт. Принципы и применения волноводной передачи. Изд. «Советское радио», 1955.
13. Л. А. Вайнштейн. Теория дифракции и метод факторизации. Изд. «Советское радио», 1966.
14. Б. А. Введенский, А. Г. Аренберг. Радиоволноводы. ОГИЗ, 1946.
15. Б. М. Машковцев, К. Н. Цибизов, Б. Ф. Емелин. Теория волноводов. Изд. «Наука», 1966.
16. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. ОГИЗ, 1942.
17. А. Уорсинг, Д. Геффнер. Методы обработки экспериментальных данных. ИЛ, 1953.
18. А. С. Смогоржевский, Е. С. Столова. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. Физматгиз, 1961.
19. А. А. Савелов. Плоские кривые. Физматгиз, 1960.
20. П. С. Соколов. Пространственные матрицы и их приложение. Физматгиз, 1960.
21. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Изд. «Наука», 1966.

Ноябрь 1968 г.