

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРИЛИВЫ В ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМАХ

I. СЛУЧАЙ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Ю. П. Коровяковский

Рассматриваются приливные явления в оболочке холодного компонента тесной двойной системы, период аксиального вращения которого отличается от периода обращения вокруг центра масс. Проведено численное интегрирование нелинейных уравнений теории динамических приливов (в предположении о сфероидальности деформаций). Найдены условия отрыва вещества от спутника в случае, когда внутренняя полость Роша не заполнена. Показано, что при некоторых значениях параметров можно объяснить образование газового потока, текущего от спутника к оболочке главной звезды, тем, что период аксиального вращения спутника отличается от периода обращения его вокруг центра масс, и мощным гравитационным возмущением от главной звезды. Получающиеся при этом направление и величина скорости газового потока таковы, что он достигает оболочки главной звезды в области наблюдаемого «горячего пятна». Полученные оценки мощности газового потока ($10^{15} \leq \dot{M} \leq 10^{16}$ г·сек.⁻¹) находятся в хорошем согласии с оценками, полученными ранее В. Г. Горбацким.

Наблюдаемые в некоторых тесных двойных системах газовые потоки, возможно, обусловлены приливными явлениями во внешних слоях спутника.

Tidal phenomena are considered in the envelope of the cooler component (the satellite) of a close binary system whose axial rotation period differs from its period of revolution round the center of mass. A numerical integration is performed of the non-linear equations of the dynamical tides theory (under the assumption that deformations are spheroidal). The conditions of matter detachment from the satellite are found for the case when the inner sphere of Roche is not filled. It is shown that with certain values of parameters the initiation of a gas stream flowing from the satellite towards the envelope of the main star can be explained due to the axial rotation period of the satellite differing from its period of revolution round the center of mass and due to the powerful gravitational perturbation by the main star. In this case the gas stream acquires such a direction and such a velocity that it reaches the envelope of the main star in the region of the observed «hot spot». Our estimates of the gas stream power ($10^{15} \leq \dot{M} \leq 10^{16}$ g·sec⁻¹) are in good agreement with the estimates obtained earlier by V. G. Gorbatsky.

Gas streams observed in some close binary systems may be due to tidal phenomena in outer layers of the satellite.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В некоторых тесных двойных системах звезд период аксиального вращения холодного компонента (спутника) не совпадает с периодом обращения его по орбите. Это было показано, в частности, Струве и Свингсом, которые исследовали вопрос о соотношении периодов аксиального и орбитального движений компонентов в тесных двойных системах [1]. Согласно их наблюдениям, во многих случаях при относительно коротких периодах обращения компонентов ($P \leq 3$ дней) оба эти движения в системе синхронны, в то время как при больших периодах ($P > 3$ дней) такая син-

хронность часто нарушена: компоненты вращаются вокруг своих осей быстрее, чем обращаются вокруг центра масс.

При синхронности этих движений и обращении компонентов по круговым орбитам приливные выступы, возникающие вследствие гравитационного взаимодействия компонентов, остаются стационарными. В других случаях (при несинхронности движений или эксцентricности орбит) эти выступы не сохраняют неизменными свою форму и положение в пространстве и претерпевают некоторую эволюцию (так называемые динамические приливы). Более мощные приливные явления будут иметь место в тех тесных двойных системах, расстояние между центрами компонентов у которых сравнительно невелико (контактные и полуразделенные системы). Из исследованных ранее тесных двойных систем аксиальное вращение спутника, возможно, несинхронно с обращением его вокруг центра масс в системах WZ Sge и VV Pup, расстояние между центрами компонентов которых порядка расстояния между Землей и Луной [2, 3]. В подобных тесных двойных системах следует ожидать мощных приливных явлений во внешних слоях спутника (горячий компонент в этих системах, по-видимому, является белым или голубым карликом).

Исследование динамических приливов в тесных двойных системах ставит ряд интересных проблем. Так, приливные явления могут влиять на характер изменения блеска двойной системы из-за эффектов отражения от приливных выступов, смещающихся относительно линии центров. Диссипативные процессы в оболочке спутника, обусловленные вязкостью, могут приводить к изменению углового момента вращения как самого спутника, так и системы в целом. Возможно, что в контактных и полуразделенных системах, в которых центры компонентов расположены особенно близко, мощные приливные возмущения способны сообщать внешним слоям спутника скорости, необходимые для отрыва вещества, и тем самым создавать благоприятные условия для возникновения газового потока, текущего от холодного спутника к оболочке главной звезды. Подобные газовые потоки наблюдаются в некоторых двойных системах [4, 5].

В связи с важностью вопросов, возникающих при рассмотрении динамических приливов в тесных двойных системах, теории динамических приливов в последнее время было посвящено большое число работ (например, [6—8]); сложность получившихся уравнений вынуждала авторов этих работ использовать линейную теорию: поле скоростей считалось таким, что можно было пренебречь членами второго порядка малости относительно величины скорости.

При попытке объяснить возникновение газового потока в тесной двойной системе приливными возмущениями предположение о малости величины скорости (а, следовательно, использование линеаризованных уравнений) не корректно, так как скорости отрыва вещества составляют здесь десятки и сотни километров в секунду [2, 3]. Поэтому уравнения динамических приливов следует решать, не налагая на величину скорости никаких ограничений. Разумеется, что при чрезвычайной сложности нелинейных уравнений ни о каком аналитическом решении не может быть и речи, решение может быть получено лишь при использовании мощных ЭЦВМ.

В настоящей работе рассматриваются приливные явления в оболочке холодного компонента тесной двойной системы и на основе численного интегрирования системы нелинейных уравнений, описывающих динамические приливы, выясняются условия возникновения потока вещества от холодного спутника к оболочке главной звезды.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Для решения поставленной задачи построим следующую модель тесной двойной системы. Вокруг центра масс по круговым орбитам обращаются холодный спутник и горячая карликовая звезда, причем диаметр последней настолько мал, что ее можно рассматривать как возмущающую материальную точку. Период вращения спутника вокруг оси и период обращения его вокруг центра масс не совпадают, но векторы соответствующих угловых скоростей коллинеарны

$$\vec{\omega}_{\text{вп}} = (1 + f) \vec{\omega}_0. \quad (1)$$

Здесь $\vec{\omega}_{\text{вп}}$ — вектор угловой скорости вращения спутника, $\vec{\omega}_0$ — вектор кеплеровой угловой скорости обращения, f — параметр несинхронности. Разделим спутник условно на две зоны: внешнюю («оболочку») и внутреннюю («ядро»). В качестве первого приближения будем считать, что «оболочка» изотермична, с тем чтобы не рассматривать энергетические процессы, а учесть лишь динамические эффекты (учет энергетических процессов будет произведен в последующих работах).

Наблюдательные данные свидетельствуют о том, что спутники в подобных системах принадлежат к классу G или K. Известно, что у звезд этих классов конвективная зона лежит близко к поверхности и вызывает мощные турбулентные движения в оболочке. Поэтому будем считать, что оболочка спутника состоит из вязкой сжимаемой жидкости и имеет сильно развитую турбулентность ($Re = 10^{14} \div 10^{15}$).

§ 3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При исследовании движения газа в оболочке удобно пользоваться сферической системой координат, жестко связанной со спутником, с началом в его центре (рис. 1).

В соответствии с предположениями предыдущего параграфа, уравнения движения (для компонентов скорости U , V , W), неразрывности (для плотности вещества ρ) и энергии будут иметь следующий вид:*

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dU}{dt} - \rho \frac{V^2 + W^2}{r} - 2W\omega_0(1+f)\sin\theta &= \rho \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} + \\ &+ \mu \left(\nabla^2 U + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{2U}{r^2} - \frac{2V \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \right); \\ \rho \frac{dV}{dt} + \rho \frac{UV}{r} - \rho \frac{W \operatorname{ctg} \theta}{r} - 2W\omega_0(1+f)\cos\theta &= \frac{1}{r} \left(\rho \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \theta} - \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \mu \left(\nabla^2 V + \frac{1}{3r} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{V}{r^2 \sin^2 \theta} \right); \\ \rho \frac{dW}{dt} + \rho \frac{W(U + V \operatorname{ctg} \theta)}{r} + 2\omega_0(1+f)(V \cos \theta - U \sin \theta) &= \\ = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\rho \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \varphi} - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \mu \left(\nabla^2 W + \frac{1}{3r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \right. \\ &\left. + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{W}{r^2 \sin^2 \theta} \right); \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \Delta; \quad T = \text{const}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

* Уравнения системы (2) тождественны уравнениям (2)–(4), приведенным в [6] (в уравнении (3) там допущена опечатка: в члене, стоящем при множителе μ в квадратных скобках, пропущен фактор r^2 , в уравнении (4) опущен квадрат у фактора $\sin \theta$, а в уравнении (8) в определении оператора ∇^2 во втором члене вместо $\sin \theta$ стоит $\cos \theta$).

здесь

$$\Delta \equiv \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (V \sin \theta) + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right]; \quad (3)$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (4)$$

и

$$\tilde{\Omega} = \Omega + V' + R \quad (5)$$

(Ω — гравитационный потенциал спутника, V' — возмущающий потенциал, R — потенциал центробежных и кориолисовых сил).

Как легко показать, в введенной системе координат величина R имеет вид

$$R = -r [R_1 \omega_0^2 r \sin \theta \cos (f\tau + \varphi)] + r^2 \sin^2 \theta \frac{\omega_0^2}{2} (1 + f)^2, \quad (6)$$

где R_1 — расстояние от начала координат до центра масс системы.

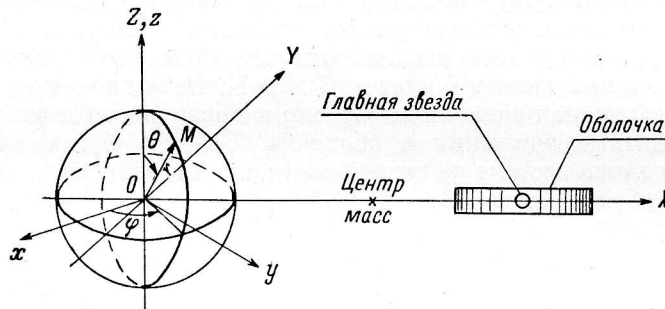


Рис. 1. Сферическая система координат, в которой рассматривается движение вещества в оболочке спутника.

Поскольку мы ограничимся рассмотрением поля скоростей в оболочке спутника и ввиду незначительности ее массы можно, не используя уравнения Пуассона для Ω , положить

$$\Omega = \frac{GM_{\text{сп}}}{r}. \quad (7)$$

К системе (2) необходимо добавить в качестве замыкающего уравнение состояния вещества; в соответствии со сделанными предположениями оно имеет вид

$$p = \frac{R^*}{\mu_0} \rho T \quad (8)$$

(R^* — универсальная газовая постоянная, μ_0 — средний молекулярный вес).

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

Положим

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_0(r) + \tilde{\Omega}'(r, \theta, \varphi, t), \quad (9)$$

$$p = p_0(r) + p'(r, \theta, \varphi, t), \quad (10)$$

где величины с индексом «0» соответствуют равновесному состоянию. В отличие от традиционного (при линеаризации) допущения о малости величин $\tilde{\Omega}'$ и p' , будем считать, что возмущения гравитационного потенциала ($\tilde{\Omega}'$) и давления (p') могут иметь тот же порядок величин, что и $\tilde{\Omega}_0$ и p_0 .

Из первого уравнения системы (2) имеем

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}_0}{\partial r} = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial r}. \quad (11)$$

Подставляя (9) и (10) в (2) и учитывая (11), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{dt} - \frac{W^2 + V^2}{r} - 2W\omega_0(1+f)\sin\theta &= \frac{\partial \tilde{\Omega}'}{\partial r} - \frac{R^*T}{(1+\tilde{\rho})} \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r} + \nu_k \left(\nabla^2 U + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{2U}{r^2} - \frac{2V \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \right); \\ \frac{dV}{dt} + \frac{UV - W^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} - 2W\omega_0(1+f)\cos\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}'}{\partial r} - \frac{R^*T}{1+\tilde{\rho}} \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \nu_k \left(\nabla^2 V + \frac{1}{3r} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{V}{r^2 \sin^2 \theta} \right); \\ \frac{dW}{dt} + \frac{W(U + V \operatorname{ctg} \theta)}{r} + 2\omega_0(1+f)(V \cos \theta - U \sin \theta) &= \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}'}{\partial \varphi} - \frac{R^*T}{1+\tilde{\rho}} \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \varphi} \right) + \nu_k \left(\nabla^2 W + \frac{1}{3r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{W}{r^2 \sin^2 \theta} \right); \\ \frac{d\tilde{\rho}}{dt} + \frac{U}{R^*T} (1+\tilde{\rho}) \frac{\partial \tilde{\Omega}_0}{\partial r} + (1+\tilde{\rho}) \Delta &= 0; \\ \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial r} + \frac{V}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{W}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \nu_k &= \frac{\mu}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

В уравнениях (12) было использовано соотношение (8), а $\tilde{\rho}$ определено как

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho(r, \theta, \varphi, t)}{\rho_0(r)}. \quad (13)$$

Система уравнений (12) описывает приливные явления в оболочке спутника. Для ее решения необходимо найти явное выражение $\tilde{\Omega}'$ и задать соответствующие начальные и граничные условия.

Выражение для $\tilde{\Omega}'$. В соответствии с (5) и (6) выражение для $\tilde{\Omega}'$ имеет вид

$$\tilde{\Omega}' = V' + R. \quad (14)$$

Разлагая возмущающий потенциал V' по сферическим функциям, получаем (аналогичное выражение для V' выведено в [7] и [9])

$$V' = \frac{GM_{r1}}{D^3} r^2 P_2(\cos \theta). \quad (15)$$

Здесь D — расстояние между центрами компонентов, а $P_2(\cos \theta)$ — полином Лежандра. Используя теорему о сложении, находим выражение V' через присоединенные функции Лежандра

$$V' = \frac{GM_{r1} r^2}{D^3} \left[-\frac{1}{2} P_2(\cos \theta) + \frac{1}{4} P_2^2(\cos \theta) \cos 2(\varphi - \varphi_1) \right], \quad (16)$$

где φ_1 — координата центра главной звезды; здесь учтено, что

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad P_2(\cos \theta_1) = -1/2, \quad P_2^1(\cos \theta_1) = 0, \quad P_2^2(\cos \theta_1) = 3.$$

Теперь в соответствии с (6) и (16)

$$\begin{aligned} \ddot{\Omega}' = & \frac{GM_{\text{гп}} r^2}{D^3} \left[-\frac{1}{2} P_2(\cos \theta) + \frac{1}{4} P_2^2(\cos \theta) \cos 2(\varphi - \varphi_1) \right] - \\ & - \omega_0^2 R_1 \sin \theta \cos(f\omega_0 t - \varphi) + \frac{1}{2} r^2 \omega_0^2 (1+f)^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Следует отметить, что численное интегрирование трехмерных нестационарных задач газовой динамики крайне затруднено (если не невозможно вообще) в силу ограниченности памяти и скорости счета ЭЦВМ [10]. Поэтому здесь приходится вводить некоторые упрощающие предположения, опираясь либо на соображения симметрии ожидаемого решения, либо допуская, что поле скоростей имеет некоторый специальный вид. В случае задачи о приливах плоскость орбиты, при сделанных предположениях, является также и плоскостью симметрии.

Будем по аналогии с [6] искать решение в виде

$$\left. \begin{aligned} U &= u(r, t) \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^j y_j^i(\theta, \varphi), \\ V &= v(r, t) \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^j y_j^i(\theta, \varphi), \\ W &= \frac{v(r, t)}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^j y_j^i(\theta, \varphi), \\ \rho/\rho_0 &= \bar{\rho} + 1 = k(r, t) \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^j y_j^i(\theta, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(u, v, k — «представители» скорости и плотности вещества), считая, что ожидаемые деформации являются сфероидальными. В [6] вместо суммирования в уравнениях типа (18) используются сферические функции i -го порядка j -й степени.

Подставив (18) в исходную систему (12), учтя, что для присоединенных функций Лежандра справедливо

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial y_j^i}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial y_j^i}{\partial \theta} \right) + j(j+1) y_j^i = 0, \quad (19)$$

и интегрируя полученные уравнения по сфере, получим систему уравнений для величин u, v и k :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \left(\frac{uv}{r} - \frac{v^2}{r} \right) - v \omega_0 (1+f) \frac{\alpha_4}{\alpha_1} = \\ &= \frac{2GM_{\text{гп}}}{D^3} r \left(\frac{e_2}{\alpha_1} + \frac{e_6}{\alpha_1} \cos 2f\omega_0 t \right) + R_1 \omega_0^2 \frac{e_4}{\alpha_1} \cos f\omega_0 t + r \omega_0^2 (1+f)^2 \frac{e_3}{\alpha_1} - \\ & - \frac{R^* T}{k} \cdot \frac{\partial k}{\partial r} \cdot \frac{\alpha_6}{\alpha_1} + \frac{\nu_k \alpha_1}{\alpha_1} \left(\frac{7}{3} \cdot \frac{v}{r^2} - \frac{1}{3r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \\ & + \frac{8}{3} \cdot \frac{\nu_k \alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right); \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{uv}{r} \cdot \frac{\beta_5}{\beta_1} + \frac{v^2}{r} \left(\frac{\beta_3}{\beta_1} + \frac{\beta_4}{\beta_1} - \frac{\beta_6}{\beta_1} \right) &= \frac{GM_{\text{гп}} r}{D^3} \cdot \frac{f_1}{\beta_1} + \\ & + R_1 \omega_0^2 \frac{f_5}{\beta_1} \cos f\omega_0 t + \frac{f_4}{\beta_1} \omega_0^2 (f+1)^2 r - \frac{R^* T}{r} \cdot \frac{\beta_7}{\beta_1} + \\ & + \frac{\nu_k (\beta_9 + \beta_{10})}{\beta_1} \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{u}{r^2} - \frac{8}{3} \cdot \frac{v}{r^2} + \frac{1}{3r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) - \frac{16}{3} \nu_k \frac{\beta_{10}}{\beta_1} \frac{v}{r_2}; \\ \frac{\partial k}{\partial \tau} + u \frac{\partial k}{\partial r} \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1} + c_1 k \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) - c_2 \frac{kv}{r} - c_3 \frac{u}{r^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \iint \left(\sum_j \sum_i y_j^i \right)^2 d\Omega; & \alpha_2 &= \iint \left(\sum_j \sum_i y_j^i \right)^3 d\Omega; \\
 \alpha_3 &= \iint \left[\sum_j \sum_i y_j^i \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_j \sum_i y_j^i \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \sum_j \sum_i y_j^i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_j \sum_i y_j^i \right)^2 \right] d\Omega; \\
 \alpha_4 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_j \sum_i y_j^i d\Omega; & \alpha_6 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i d\Omega; \\
 e_2 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i P_2(\cos \theta) P_2(\cos \theta_1) d\Omega; & e_3 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i \sin^2 \theta d\Omega; \\
 e_4 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i \cos \varphi \sin \theta d\Omega; \\
 e_6 &= \frac{1}{12} \iint \sum_j \sum_i y_j^i \cos 2\varphi P_2^2(\cos \theta) P_2^2(\cos \theta_1) d\Omega; \\
 \kappa_1 &= \alpha_1 = \iint \left(\sum_j \sum_i y_j^i \right)^2 d\Omega; & \kappa_2 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i \left(2 \sum_i^1 y_i^1 + 6 \sum_i^2 y_i^2 \right) d\Omega; \\
 \beta_1 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_j \sum_i y_j^i d\Omega; & \beta_2 &= \iint \left(\sum_j \sum_i y_j^i \right)^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_j \sum_i y_j^i d\Omega; \\
 \beta_3 &= \iint \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \sum_j \sum_i y_j^i \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_j \sum_i y_j^i \sum_j \sum_i y_j^i d\Omega; \\
 \beta_4 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_j \sum_i y_j^i \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \theta} \sum_j \sum_i y_j^i \frac{d\Omega}{\sin^2 \theta}; \\
 \beta_5 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_j \sum_i y_j^i d\Omega; & \beta_6 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_j \sum_i y_j^i \right)^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} d\Omega; \\
 \beta_7 &= \beta_1; & \beta_9 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_i^1 y_i^1 d\Omega; & \beta_{10} &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_i^2 y_i^2 d\Omega; \\
 f_1 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i P_2(\cos \theta) \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta} d\Omega; & f_4 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i \sin \theta \cos \theta d\Omega; \\
 f_5 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i \cos \theta \sin \varphi d\Omega; & \delta_1 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i d\Omega; & \delta_2 &= \iint \left(\sum_j \sum_i y_j^i \right)^2 d\Omega; \\
 \delta_3 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i y_i^0 d\Omega; & \delta_4 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i \sum_i^1 y_i^1 d\Omega; & \delta_5 &= \iint \sum_j \sum_i y_j^i \sum_i^2 y_i^2 d\Omega; \\
 \delta_6 &= \iint \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_j \sum_i y_j^i \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_j \sum_i y_j^i \right)^2 \right] d\Omega; \\
 c_1 &= (\delta_3 + \delta_4 + \delta_5) / \delta_1; & c_2 &= \frac{2(\delta_4 - 3\delta_5) - \delta_6}{\delta_1}; \\
 c_3 &= \delta_2 / \delta_1 \cdot \frac{g_{эфф} r_0}{R^2 T}; & d\Omega &= \sin \theta d\theta d\varphi.
 \end{aligned}$$

В уравнения (20) входит ν_k — коэффициент кинематической вязкости, который выражается через коэффициент динамической вязкости μ посредством формулы

$$\nu_k = \frac{\mu}{\rho}. \quad (21)$$

ТАБЛИЦА 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α_i/α_1	1	2.965	4.986	0	0.2055	0.2055	—	—	—	—
e_i/α_1	0.2055	-0.2055	0.1096	0.06848	0	0.1233	—	—	—	—
κ_i/α_1	4.219	1	—	—	—	—	—	—	—	—
β_i/β_1	1	2.328	-2.344	-11.875	2.328	-8.875	0.5000	—	0.2500	0.7500
f_i/β_1	-0.1875	0	0	-0.1250	-0.1875	—	—	—	—	—
δ_i/δ_1	1	4.867	1	0.6667	3.200	20.533	—	—	—	—

ТАБЛИЦА 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i	2.965	4.986	—	0.4178	1.027	0.1233	—	0.004304	0.002349	0.001485
b_i	2.328	-5.344	2.328	-0.5938	-2.812	—	0.01044	0.0005568	0.002227	—
c_i	4.867	4.867	—	18.98	—	—	—	—	—	—

Поскольку для газа, движущегося со скоростью, близкой к звуковой, не существует теории турбулентности и нет выражения для коэффициента кинематической турбулентной вязкости через известные физические характеристики среды, то величина ν_k считалась параметром задачи, которому придавались значения $\nu_k = 10^{13} - 10^{15} \text{ см}^2 \cdot \text{сек.}^{-1}$.

Величины коэффициентов $\alpha_i/\alpha_1, e_i/\alpha_1, \kappa_i/\alpha_1, \beta_i/\beta_1, f_i/\beta_1, \delta_i/\delta_1$ для случая $N=2$ (см. (18)) приведены в табл. 1. Для численного интегрирования уравнений газовой динамики удобно перейти к безразмерным длине $x=r/r_0$, времени $\tau = \omega_0 t$ и скорости $u' = u/r_0 \omega_0, v' = v/r_0 \omega_0$. Опуская штрихи и вводя эти безразмерные величины в систему уравнений (20), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= -a_1 u \frac{\partial u}{\partial x} - a_2 \left(\frac{uv}{x} - \frac{v^2}{x} \right) + x \left(a_4 + \frac{a_5}{x} \cos f\tau + a_6 \cos 2f\tau \right) - \\ &- \frac{a_8}{k} \frac{\partial k}{\partial x} + a_9 \left(\frac{7}{3} \frac{v}{x^2} - \frac{1}{3x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{x^2} \right) + a_{10} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right); \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} &= -b_1 u \frac{\partial v}{\partial x} - b_3 \frac{uv}{x} - b_2 \frac{v^2}{x} + x \left(b_4 + \frac{b_5}{x} \cos f\tau + b_{10} \cos 2f\tau \right) - \\ &- \frac{b_7}{x} + b_8 \left(\frac{8}{3} \frac{u}{x^2} - \frac{8}{3} \frac{v}{x^2} + \frac{1}{3x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - b_9 \frac{v}{x^2}; \\ \frac{\partial k}{\partial \tau} &= -c_1 u \frac{\partial k}{\partial x} - c_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2u}{x} \right) k + c_3 \frac{kv}{x} + c_4 \frac{uk}{x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Система (22) есть система уравнений динамических приливов в безразмерной форме. Выражения для коэффициентов a_i, b_i и c_i легко получить, если использовать единицы длины и времени, введенные выше, и обозначения к системе (20). Их значения приведены в табл. 2 для следующих значений параметров:

$$\begin{aligned} M_{\text{сп}} &= 0.5 M_{\odot}, \quad D = 3 \cdot 10^{10} \text{ см}, \quad r_0 = 0.3 D_0, \quad q = M_{\text{пл}}/M_{\text{сп}} = 1, \\ a &= g_{\text{эф}} r_0 / R^* T = 3.9, \quad f = 1.0, \quad \mu_0 = 1, \quad \nu_k = 10^{14}. \end{aligned} \quad (23)$$

Итак, предположение о сфероидальности ожидаемых деформаций существенно упростило математическую формулировку задачи, которая свелась к одномерной нестационарной задаче газовой динамики, поддающейся в настоящее время различным методам решения (см., например, [10—14]).

Начальные и граничные условия. Будем считать, что в начальный момент времени $t=0$ вещество оболочки спутника находится в состоянии покоя (относительно системы координат *xuz*, рис. 1) и что в оболочке выполняется условие гидростатического равновесия, т. е.

$$\text{при } t=0 \quad u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad k(x, 0) = 1. \quad (24)$$

Граничное условие при $x=x_*$ (x_* — безразмерный радиус звезды) можно найти, исходя из предположения о том, что возмущенная поверхность спутника свободна от напряжений, т. е. что радиальные компоненты тензора деформаций равны нулю [6]

$$\mathfrak{A}_{rr} = \mathfrak{A}_{r\theta} = \mathfrak{A}_{r\varphi} = 0. \quad (25)$$

Используя выражение для компонентов тензора деформаций (см., например, [6, 15]) и учитывая (18), перепишем (25) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_*} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=x_*} = \frac{u-v}{r}, \quad \rho(x_*, t) = 0. \quad (26)$$

Для задания граничных условий при $x=x_n$, которые в общем случае неизвестны, будем считать, что реализуется один из трех случаев: а) через границу «ядра» и «оболочки» существует поток вещества с заданной постоянной скоростью, т. е. $u=\text{const}$, $v=0$; б) вещество на границе «ядра» и «оболочки» обладает нулевой скоростью; в) скорость вещества меняется непрерывно при переходе из области «ядра» в область «оболочки», и величину скорости на границе можно находить, экстраполируя получающееся решение на каждом шаге интегрирования системы уравнений.

§ 5. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Для численного интегрирования системы уравнений (23) разобьем отрезок $[x_0, x_*]$ на M равных частей точками

$$x_j = x_0 + jhx, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M \quad (27)$$

(hx — шаг разбиения), введем в рассмотрение сеточные функции u_j , v_j и k_j по формулам

$$u(x_j, \tau) = u_j(\tau), \quad v(x_j, \tau) = v_j(\tau), \quad k(x_j, \tau) = k_j(\tau) \quad (28)$$

и в каждом из узлов x_j ($j=1, 2, \dots, M-1$) заменим производные по x конечно-разностными соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial x} &= \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2hx}, & \frac{\partial v_j}{\partial x} &= \frac{v_{j+1} - v_{j-1}}{2hx}, & \frac{\partial k_j}{\partial x} &= \frac{k_{j+1} - k_{j-1}}{2hx}, \\ \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} &= \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{hx^2}, & \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} &= \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{hx^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Вводя соответствующие сеточные функции u_j , v_j , k_j в уравнения (22) и производя замену производных соотношениями (29), мы получим систему $3 \times (M-1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой можно осуществить методом Рунге—Кутты. Этот метод решения системы уравнений в частных производных второго порядка («метод прямых») имеет более высокую точность аппроксимации дифференциального временного оператора, чем обычные разностные схемы, в которых система дифференциальных уравнений в частных производных заменяется системой алгебраических уравнений. Условия устойчивости и сходимости метода прямых при использовании его для интегрирования уравнений исследовались в ряде работ [16, 17]. Выбор шага по времени при интегрировании осуществлялся нами в соответствии с критерием устойчивости, выведенным на основании исследования модельного уравнения (аналогично [17]), и приближенно оценивался по формуле

$$ht \leq \min \left[\frac{hx}{|a_1|u + \sqrt{[2R^*T/(r_0^2 \omega_0^2)]}}; \frac{hx^2}{2a_{10}} \right]. \quad (30)$$

При выполнении в процессе интегрирования системы условия (30) счет почти всегда оказывался устойчивым.

Для сохранения точности аппроксимации дифференциальных операторов по x на границах сетки $j=0, M$ (при использовании левосторонних или правосторонних разностей вместо центральных в соответствии с (29)) на границах сетки $j=M+1, M+2$ и $j=-1, -2$ вводились «фиктивные» узлы. Значения сеточных функций в граничных точках вычислялись, исходя из граничных условий, а значения сеточных функций в «фиктивных» узлах находились путем экстраполяции решения за границы отрезка $[x_0, x_*]$. При экстраполяции использовалась видоизмененная интерполяционная формула Ньютона, в которой учитывались разности до четвертого порядка включительно. Для решения системы обыкновенных

дифференциальных уравнений была составлена программа на языке «АЛГОЛ 60». Трансляция и последующие расчеты проводились на ЭЦВМ «БЭСМ-4» и «М-20». Число узлов (M) при расчетах принималось равным 8 и 16. Интегрирование по времени производилось до тех пор, пока скорость не достигала величины, равной скорости отрыва вещества от спутника в рассматриваемой двойной системе. Эти скорости отрыва в двойных системах с параметрами (23) были найдены в предыдущих работах [2, 3].

При интегрировании системы уравнений (22), как уже отмечалось, необходимо задать в начальный момент времени распределение плотности вещества в оболочке по радиусу. Это распределение, которое можно найти путем интегрирования уравнения (11), имеет следующий вид:

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) = \rho_a \exp(-a(x - x_a)), \quad (31)$$

где $a = g_{эфф} r_0 / R * T$ и ρ_a — плотность веществ на нижней границе оболочки.

Интегрирование системы уравнений проводилось при следующих значениях параметров:

$$f = 1.5; a = 0, 0.3, 3.9, 36.03; \nu_k = 10^{14}.$$

§ 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

На рис. 2 и 3 приведены полученные распределения величин u , v и k по радиусу в разные моменты времени.

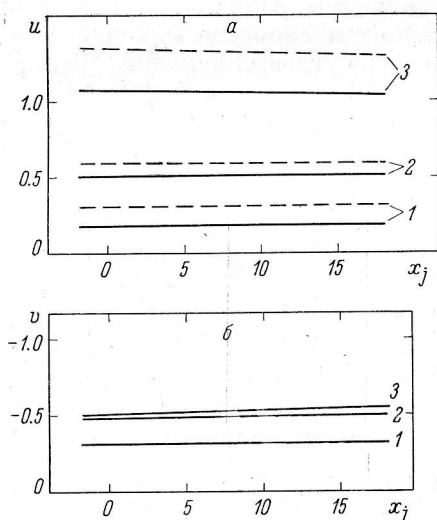


Рис. 2. Распределение величин u и v в оболочке спутника по радиусу в разные моменты времени при $f=1.0$, $a=36.03$ (сплошные линии), $a=3.9$ (штриховые линии).

a — распределение величины u по x_j ; b — распределение величины v по x_j ; 1 — $\tau=0.1$, 2 — $\tau=0.2$, 3 — $\tau=0.3$.

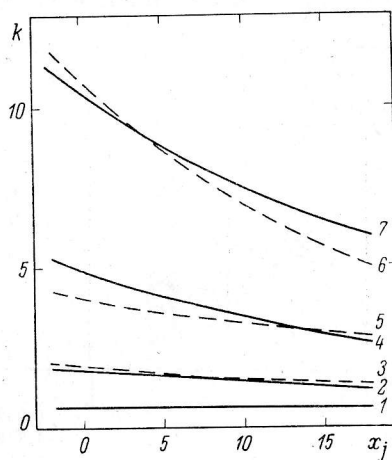


Рис. 3. Распределение величины k в оболочке спутника по радиусу в разные моменты времени при $f=1.0$, $a=36.03$ (сплошные линии), $a=3.9$ (штриховые линии).

1 — $\tau=0$, 2 — $\tau=0.18$, 3 — $\tau=0.08$, 4 — $\tau=0.22$, 5 — $\tau=0.10$, 6 — $\tau=0.24$, 7 — $\tau=0.12$.

На рис. 4 показано изменение величин u , v и k со временем в точке x_j при $j=8$.

Из рис. 4 можно видеть, что существенную роль в росте величин u и v , а следовательно и радиальной (U), тангенциальной (V) и азимутальной (W) компонент скорости, играет центробежная сила, обусловленная аксиаль-

ным вращением спутника. При угловой скорости вращения $\omega_v = 6 \omega_{op}$ ($f=5.0$, кривая 2) величина u достигает значения порядка единицы за промежуток времени $\Delta \tau = 0.05$, в то время как при $\omega_{vp} = 2 \omega_0$ ($f=1.0$, кривые 3, 4) этот промежуток времени составляет $\Delta \tau = 0.3 \div 0.4$. Из этого же рисунка (а, б) можно также сделать вывод о том, что, чем круче первоначальный градиент плотности (чем больше величина a в уравнении (31)), тем быстрее растет скорость.

Как следует из рис. 4, б, величина v за промежуток времени $\Delta \tau = 0.3 \div 0.4$ асимптотически приближается к значению -0.5 для $f=1.0$.

Из рис. 4, в видно, что на поведение величины k в точке x_j существенное влияние оказывает значение величины a . При $a=0$ (однородная оболочка, плотность $\rho = \rho_a = \text{const}$) величина k медленно уменьшается: в слое газа, расширяющегося с некоторой скоростью, в силу уравнения неразрывности плотность вещества должна уменьшаться (а вместе с ней должна уменьшаться и величина $k = \rho(x, \tau) / \rho_0(x)$). Уменьшение величины k со временем будет происходить также и в том случае, когда начальный градиент плотности мал, а скорость расширения вещества значительна (рис. 4, кривая 2): вещество, переходящее в точку x_j из более глубоких слоев, не может компенсировать уменьшение плотности вследствие большой скорости расширения. Лишь в том случае, когда первоначальный градиент плотности велик (рис. 4, в, кривые 3 и 4), приходящее в точку x_j вещество с избытком компенсирует уменьшение плотности из-за расширения оболочки, и величина k со временем возрастает, причем тем быстрее, чем больше величина a .

Из уравнений (18) следует, что величины радиальной (U), тангенциальной (V) и азимутальной (W) компонент скорости можно получить, умножая величины u и v на соответствующие угловые функции ($\sum_j \sum_i y_j^i(\theta, \varphi)$, $\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_j \sum_i y_j^i(\theta, \varphi)$ и $\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_j \sum_i y_j^i(\theta, \varphi)$). Значения этих функций были получены

ТАБЛИЦА 3

θ	$\sum_j y_j^i(\theta, \varphi)$			θ	$\sum_j y_j^i(\theta, \varphi)$		
	$\sum_j y_j^i(\theta, \varphi)$	$\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_j y_j^i(\theta, \varphi)$	$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_j y_j^i(\theta, \varphi)$		$\sum_j y_j^i(\theta, \varphi)$	$\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_j y_j^i(\theta, \varphi)$	$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_j y_j^i(\theta, \varphi)$
0°	+2.50000	+2.00000	+0.00000	190	+4.30389	-3.95442	-2.22577
10	+2.33427	+1.95442	-1.87847	200	+3.73783	-3.81908	-4.19875
20	+1.85844	+1.81908	-3.51471	210	+2.86603	-3.59808	-5.69615
30	+1.13597	+1.59808	-4.69615	220	+1.78699	-3.29813	-6.55163
40	+0.25490	+1.29813	-5.26606	230	+0.62184	-2.92836	-6.67489
50	-0.66373	+0.92836	-5.14280	240	-0.50000	-2.50000	-6.06218
60	-1.50000	+0.50000	-4.33013	250	-1.45611	-2.02606	-4.79642
70	-2.14015	+0.02606	-2.91703	260	-2.14543	-1.52094	-3.03693
80	-2.49273	-0.47906	-1.06731	270	-2.50000	-1.00000	-1.00000
90	-2.50000	-1.00000	+1.00000	280	-2.49273	-0.47906	+1.06731
100	-2.14543	-1.52094	+3.03693	290	-2.14015	+0.02606	+2.91703
110	-1.45611	-2.02606	+4.79642	300	-1.50000	+0.50000	+4.33013
120	-0.50000	-2.50000	+6.06218	310	-0.66373	+0.66373	+5.14280
130	+0.62184	-2.92836	+6.67489	320	+0.25490	+1.29813	+5.26606
140	+1.78699	-3.29813	+6.55163	330	+1.13397	+1.59808	+4.69615
150	+2.86603	-3.59808	+5.69615	340	+1.85844	+1.81908	+3.51471
160	+3.73783	-3.81908	+4.19875	350	+2.33427	+1.95442	+1.87847
170	+4.30389	-3.95442	+2.22577	360°	+2.50000	+2.00000	+0.00000
180	+4.50000	-4.00000	+0.00000				

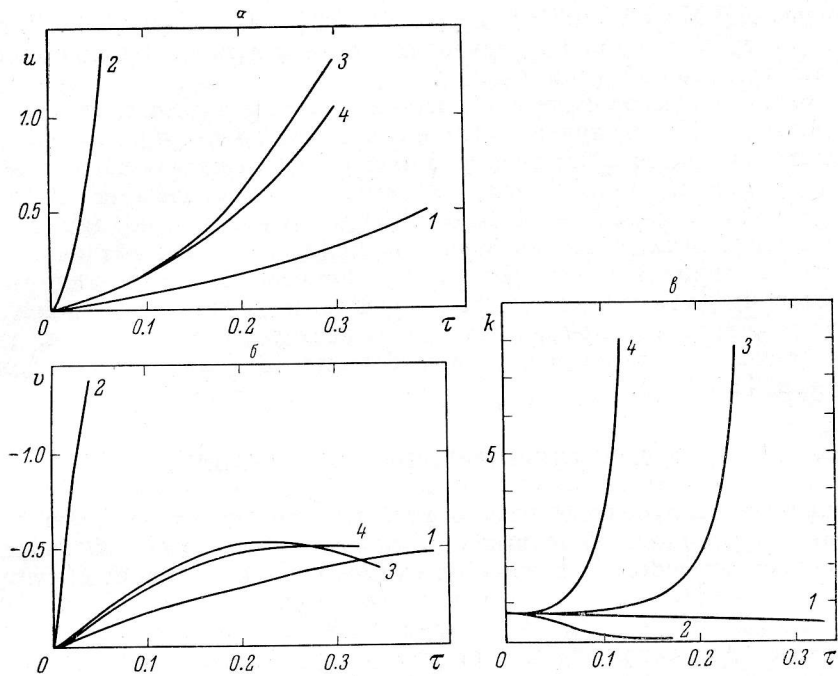


Рис. 4. Изменение величин u , v и k со временем в точке x_j при $j=8$.
 a — изменение величины u , b — изменение величины v , c — изменение величины k ;
 1 — при $f=1.0$, $a=0$; 2 — при $f=5.0$, $a=0.3$; 3 — при $f=1.0$, $a=3.9$; 4 — при $f=1.0$, $a=36.03$.

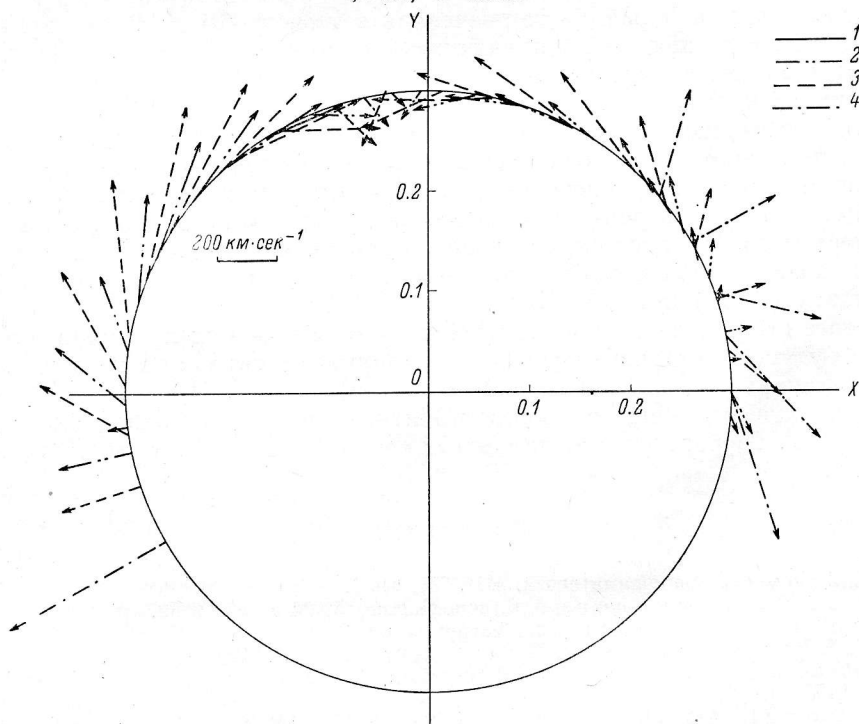


Рис. 5. Поле скоростей в оболочке спутника в разные моменты времени.
 1 — $\tau=0.1$, 2 — $\tau=0.2$, 3 — $\tau=0.3$, 4 — $\tau=0.5$.

с помощью ЭЦВМ «Одра-1024» для $\varphi=0^\circ$ (10°) 360° и $\theta=0^\circ$ (10°) 90° . Для иллюстрации их поведения при изменении угла φ в табл. 3 приведены результаты вычислений (при $\theta=90^\circ$).

На рис. 5 показано поле скоростей в оболочке спутника в проекции на плоскость XU для случая $f=1.0$, $a=0$. Из этого рисунка следует, что в момент времени $\tau \approx 0.5$ вещество оболочки, лежащее вблизи линии центров системы, приобретает скорость с компонентами $U=250 \div 300$ км/сек. и $W=-200 \div 350$ км/сек. Вещество, обладающее такими компонентами скорости, будет двигаться по направлению к оболочке главной звезды, отклоняясь под действием кориолисовой силы от линии центров в сторону движения спутника по орбите, и достигнет оболочки, вращающейся вокруг главной звезды, приблизительно в том месте, где в подобных системах наблюдается «горячее пятно» [3] (для других систем см. расчеты в [18, 19]).

§ 7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Используя полученные результаты, можно оценить потерю массы холодным спутником. Подобные оценки важны для расчетов эволюции тесных двойных систем и позволяют судить о роли приливных возмущений в образовании газовых потоков в тесных двойных системах. Оценку можно произвести, поделив некоторую долю массы оболочки на время, необходимое для того, чтобы соответствующая часть вещества оболочки приобрела скорость отрыва (см. рис. 5). Для значений параметров $f=1.0$, $a=36.03$ скорость потери массы будет лежать в пределах $10^{15} \leq \dot{M} \leq 10^{16}$ г·сек.⁻¹, что находится в хорошем согласии с оценками В. Г. Горбачёго [20].

Цель настоящей работы заключалась в том, чтобы показать принципиальную возможность потери вещества спутником, не заполнявшим в начальный момент внутренней полости Роша, в том случае, когда вращение спутника вокруг оси несинхронно с обращением его по орбите. Проведенные расчеты показали, что в рассматриваемых системах приливные возмущения при некоторых значениях параметров способны сообщить веществу оболочки скорость, необходимую для отрыва вещества от спутника. Этот результат, по всей вероятности, может быть полезным для расчетов эволюции тесных двойных систем, при выполнении которых делается предположение о начале обмена массой в системе лишь по достижении спутником границы внутренней полости Роша.

Более строгое рассмотрение проблемы динамических приливов позволит в будущем детальнее исследовать приливные явления в тесных двойных системах.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность В. Г. Горбачёму за ряд ценных советов при выполнении настоящей работы.

Литература

1. О. Струве. Эволюция звезд. ИЛ, М., 1954.
2. Ю. П. Коровяковский, *Астрофизика*, 5, № 1, 67, 1969.
3. Ю. П. Коровяковский, *Астрофизика*, 7, № 1, 635, 1971.
4. W. Krzeminski, R. P. Kraft, *Astrophys. J.*, 140, 921, 1964.
5. J. Sahade. Etoiles à raies d'émission. Cointe Slessin, Institut d'Astrophys., 1958, p. 46.
6. Z. Koral, *Astrophys. Space Sci.*, 1, No. 2, 179, 1968; No. 3, 284, 1968; No. 4, 411, 1968; 2, No. 1, 48, 1968.
7. G. F. Roach, *Astrophys. Space Sci.*, 1, No. 1, 32, 1968.
8. J. P. Zahn, *Ann. Astrophys.*, 29, 313, 489, 565, 1966.
9. В. А. Крат. Фигуры равновесия небесных тел. Гостехиздат, М.—Л., 1950.

10. П. Н. Чушкин. Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений. ВЦ АН СССР, М., 1968.
11. А. А. Самарский, П. П. Волосевич, М. Н. Волчинская, С. П. Курдюмов. Численные методы решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики. ИПР АН СССР, М., 1967.
12. Р. Д. Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, М., 1960.
13. В. Вазов, Ф. Дж. Форсайт. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. ИЛ, М., 1963.
14. Б. М. Будак, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1, № 6, 1105, 1961.
15. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика, ч. II. Физматгиз, М., 1963.
16. Л. А. Чудов. Вычислительные методы и программирование, т. VIII. Изд-во МГУ, 1967.
17. И. Б. Браиловская. Вычислительные методы и программирование, т. VII. Изд-во МГУ, 1967.
18. M. Plavec, Trans. IAU, XIIB, 508, 1964.
19. M. Plavec, S. Kriz, Bull. astr. Inst. Csl., 16, No. 5, 297, 1963.
20. В. Г. Горбачкий, Астрофизика, 3, 245, 1967.

Ноябрь 1970 г.