

УДК 524.827-17

НЕСТАБИЛЬНОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НИЗКИХ МУЛЬТИПОЛЕЙ КОСМИЧЕСКОГО МИКРОВОЛНОВОГО ФОНА

© 2008 П. Д. Насельский¹, О. В. Верховданов², М. Т. Б. Нильсен¹¹Институт Нильса Бора, Копенгаген, Дания¹²Специальная астрофизическая обсерватория, Нижний Архыз, 369167 Россия²

Поступила в редакцию 3 июня 2008 г.; принята в печать 7 июля 2008 г.

В данной статье обсуждается проблема байеса в карте космического микроволнового фонового излучения ILC (Internal Linear Combination) и показывается, что она связана с коэффициентом кросс-корреляции $K(\ell)$ истинного космического микроволнового фона и фоновой компоненты излучения для каждого мультиполя ℓ . Мы приводим анализ кросс-корреляций для квадрупольной и октупольной компонент карт ILC космической миссии WMAP и показываем, что коэффициент корреляции меняется в пределах от -0.52 до 0.60 . Проанализировав методом Монте-Карло 10^4 моделей случайного гауссова сигнала космического микроволнового фона, мы показываем, что функция распределения соответствующего коэффициента кросс-корреляции имеет полиномиальную форму $P(K, \ell) \propto (1 - K^2)^{\ell-1}$. Мы также показываем, что наиболее вероятное значение коэффициента кросс-корреляции карт ILC и фоновой компоненты квадрупольной имеет два экстремума на уровне $K \simeq \pm 0.58$. Мы анализируем проблему дебайесинга в карте ILC космического микроволнового фона и показываем, что восстановление реального байеса является весьма проблематичным из-за космической вариации сигнала. Кроме того, нестабильность процедуры дополнительно усугубляется переменностью знака квадрупольной и октупольной, из-за этого четные моды гармоник $\ell + m$ восстанавливаются со значительной ошибкой. Эта ошибка проявляется в изменении знака четных мод низких мультиполей на противоположный истинному знаку и приводит к значительным изменениям коэффициента кросс-корреляции карт космического микроволнового фона и фона. Мы показываем также, что для модельных реализаций сигнала космического микроволнового фона, у которых знак квадрупольной компоненты $(2, 0)$ отрицательный (и такой же как у фона), соответствующая вероятность получения положительного знака после применения метода ILC будет около 40%.

Key words: теоретическая и наблюдательная космология

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с эксперимента COBE (The Cosmic Background Explorer), и после появления данных WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [1–7] однолетнего, трехлетнего и пятилетнего циклов наблюдений проблеме восстановления низких мультиполей реликтового излучения (Cosmic Microwave Background — CMB) $\ell \leq 10$ (мощность квадрупольной, планарность и выравнивание квадрупольной и октупольной и т.п.) уделяется много внимания. Множество космологических моделей применяется для объяснения неочевидных особенностей низких мультиполей карты ILC, включающих модель скользящего спектрального индекса первичных адиабатических возмущений [1–5], нетривиальную топологию Вселенной [8, 9], нарушенную масштабную инвариантность (BSI)

спектра мощности [10, 11], первичное магнитное поле [12–14], анизотропные космологические модели Бьянки (Bianchi) VII_h [15–19] и т.п.

Проблема низкой мощности квадрупольной CMB может иметь отношение и к негауссовости низких мультиполей WMAP, куда также могут входить проблемы планарности и выравнивания квадрупольной и октупольной [20–23], корреляции с фоновыми компонентами [4, 24–27], локальные дефекты карт CMB [28] и т.п. Такие особенности требуют дополнительного теоретического объяснения, так как происхождение их все еще остается неясным.

Другой взгляд на проблему низких мультиполей CMB сигнала карты ILC заключается в рассмотрении кросс-корреляции между сигналом CMB и фоновыми компонентами (байес карты ILC [4, 24, 27, 29, 30]), систематических эффектов [31], включающих влияние моды $\ell = 2$ на диполь через далекие боковые лепестки диаграммы направленности [32].

¹E-mail: nasefsky@nbi.dk²E-mail: vo@sao.ru

В этой статье мы хотим перепроверить наиболее важный момент в анализе данных современных экспериментов по изучению СМВ, относящийся к проблеме разделения сигнала СМВ и фоновых компонент методом внутренней линейной комбинации (Internal Linear Combination Method — ILC). Нет необходимости говорить, что разделение сигнала СМВ и мешающего фона является основной проблемой для всех экспериментов в области исследования реликтового излучения, включая продолжающуюся миссию WMAP и будущую миссию Planck. Основной формализм метода ILC, с помощью которого можно восстановить сигнал СМВ из наборов наблюдательных данных, заключается в комбинировании их с вещественными взвешивающими коэффициентами данных в одну (Linear Combination) карту. Тогда, чтобы найти эти взвешивающие коэффициенты, мы должны минимизировать некоторый функционал, определяемый на многочастотном наборе данных микроволнового фона, содержащих информацию о первичном сигнале СМВ. Такой функционал (подробнее см. вариации по Тегмарку и Ифстафиоу [33] (далее как TE)) может быть определен как в пространстве пикселей (как это сделано командой WMAP), так и в пространстве сферических гармоник (Тегмарк и др. [34], далее как ТОН), см. также [4, 30, 35]. Ниже мы будем обсуждать только низкие мультиполи СМВ ($\ell \leq 10$) и, в частности, квадруполь, для которого подход ILC в мультипольном пространстве оказывается очень полезным.

Тем не менее, подход ILC в сочетании с методом минимальных вариаций (Minimal Variance Method) (далее как ILC MVM) дает специфическую особенность в получаемом сигнале СМВ, известную как байес. Байес напрямую отражает коэффициент кросс-корреляции с фоновыми компонентами и приводит к негауссовости и статистической анизотропии получаемого СМВ из-за взаимодействия с фоновыми компонентами. Это происходит из-за того, что MVM исходно разрабатывался для отделения гауссового сигнала, статистические свойства которого полностью определяются вариацией каждой компоненты. В то же время хорошо известно, что MVM не обоснован надлежащим образом, особенно в тех случаях, когда у нас есть только одна, уникальная, реализация случайного процесса, в которой сигнал СМВ смешан со значительно негауссовым фоном. Более того, статистика низких мультиполей СМВ может рассматриваться как предельно пекулярная, так как у нас нет статистического ансамбля реализаций для ее оценки.

Данная работа посвящена исследованиям байеса карты ILC и ее статистических погрешностей. Мы показываем, что так называемая процедура дебайесинга для карты ILC сигнала СМВ содержит

в себе потенциальную нестабильность и непредсказуемость для единичной реализации СМВ.

Краткая схема статьи: в разделе 2 мы фокусируем внимание на математическом базисе ILC MVM, в точности таком, каков был предложен в работе [4]. С помощью анализа модели с однородными спектрами фоновых компонент мы показываем, что байес карты ILC и байес спектра мощности будет порядка $K(\ell)$ и $K^2(\ell)$, где $K(\ell)$ — коэффициент истинной кросс-корреляции СМВ и фоновых компонент. Следуя работе [26], мы будем называть эту кросс-корреляцию “космической ковариацией”. Из-за статистического происхождения этой корреляции космическая ковариация является неопределенной для каждой единичной реализации сигнала СМВ, причем даже для хорошо известных фоновых компонент. В то же время полученный с помощью ILC MVM сигнал ILC СМВ и соответствующие фоновые компоненты ILC MVM имеют нулевые кросс-корреляции из-за самого подхода ILC MVM.

В разделе 3 мы исследуем статистические свойства коэффициента кросс-корреляции между случайным гауссовым сигналом СМВ и фонами WMAP в полосах K, Ka, Q, V, W. Мы генерируем 10^4 реализаций гауссова сигнала СМВ для наиболее подходящей космологической модели Λ CDM по данным WMAP и кросс-коррелируем их с фонами, полученными командой WMAP. Это фоновые компоненты по методу максимальной энтропии (MEM), которые представляют собой сумму синхротронного, свободно-свободного излучений и излучения пыли для каждой частоты. Мы покажем, что функция распределения вероятности для этих кросс-корреляций имеет полиномиальную форму $P(K, \ell) \propto (1 - K^2)^{\ell-1}$. После этого мы найдем наиболее вероятные величины коэффициентов $\overline{K}(\ell)$ и $\overline{K}^2(\ell)$. Другими словами, эти коэффициенты определяют наиболее вероятную величину байеса для ILC СМВ и для спектра мощности. Учитывая, что карты третьего года — ILC(III) и пятого года — ILC(V) уже исправлены за байес, как заявила команда WMAP, мы проверили кросс-корреляцию между ILC и фонами WMAP. После дебайесинга эти кросс-корреляции должны показать возможную величину $K(\ell)$ для истинного СМВ и для истинного фона. Для полос K–W миссии WMAP соответствующие коэффициенты кросс-корреляции порядка $K \simeq -0.51$. Отметим, что эта величина близка наиболее вероятному значению $\overline{K}(\ell)$ в распределении функции $KP(K, \ell = 2)$.

В разделе 4 мы обсуждаем некоторые особенности квадруполья и октуполья ILC. Как следует из моделирования методом Монте-Карло, проведенного в работе [36] для низких мультиполей $\ell = 2, 3,$

знак мод компонент (2,0), (2,2) и (3,1) изменяется на противоположный для приблизительно 20% выходящих карт СМВ. Это значительно меняет морфологию выходящей карты. Мы покажем, что изменение знака имеет место для тех входных квадрупольных данных моделей СМВ, для которых знак моды $\ell = 2, m = 0$ противоположен знаку фоновой компоненты. Для гауссова сигнала около 40% реализаций имеют знак $\text{sign } c_{2,0} = -\text{sign } F_{2,0}$, где $c_{2,0}$ и $F_{2,0}$ — компоненты $m=0$ квадрупольа для входных карт СМВ и фонов соответственно. Грубо говоря, для 40% этих реализаций восстановление компоненты $\ell = 2, m = 0$ может иметь неправильный знак в моде (2,0). В этом разделе мы дадим аналитическое описание эффекта перемены знака, основанное на свойствах байеса.

Все результаты обобщены в разделе Выводы.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БАЗИС МЕТОДА ILC MVM

Рассмотрим общий формализм метода ILC в предположении, что у нас есть экспериментальные данные $\Delta T(\theta_p, \phi_p, \nu_i)$ для анизотропии СМВ, полученные для некоторой полосы частот ν_1, ν_2, \dots . Здесь θ_p и ϕ_p — стандартные полярный и азимутальный углы сферической координатной системы, а индекс p отмечает соответствующий пиксел. Наблюдаемая температура неба для каждого пиксела p в заданной полосе ν_i — линейная комбинация истинного сигнала СМВ — $T_c(p)$ и истинного фона $f_i(p)$. В действительности компоненты фона в различных частотных полосах (большой частью синхротрон, свободно-свободное излучение и пыль) имеют угловые вариации спектральных индексов. Тем не менее, используя различные разъединенные области неба с почти одинаковыми спектрами фонов и низким уровнем пространственных вариаций, мы можем упростить математический аппарат метода ILC [4]. Следуя модели фоновых компонент WMAP, предположим, что для некоторой области неба пространственные вариации излучения фоновых компонент пренебрежимо малы и $f_i(p) = S_i F(p)$, где S_i — частотный спектр, $F(p)$ — пространственное распределение фона для каждой полосы i . Основная идея метода ILC состоит в том, чтобы оценить сигнал СМВ, применяя вещественные взвешивающие коэффициенты w_i для каждой области неба с монотонным спектром фона [4]

$$T_{ilc}(p) = \sum_i w_i T_i(p) = T_c(p) + \Gamma F(p), \quad \sum_i w_i = 1, \quad (1)$$

где $\Gamma = \sum_i w_i S_i$. Коэффициенты w_i могут быть найдены минимизацией вариаций (см. работу [4])

$$\sigma_{ilc}^2 = \langle T_{ilc}^2(p) \rangle - \langle T_{ilc}(p) \rangle^2 =$$

$$\sigma_c^2 + 2\Gamma\sigma_{cF} + \Gamma^2\sigma_F^2. \quad (2)$$

Здесь σ_c^2 — вариация истинного СМВ, σ_F^2 — вариация истинного фона, а $\sigma_{cF} = \langle T_c(p)F(p) \rangle - \langle T_c(p) \rangle \langle F(p) \rangle$ — космическая ковариация между истинными СМВ и фоном [26].

Угловые скобки в уравнении 2 и далее обозначают усреднение по пикселям, принадлежащим каждой зоне карты с монотонным поведением фоновой компоненты. Минимум вариации σ_{ilc}^2 может быть легко найден из уравнения $\frac{d\sigma_{ilc}^2}{dw_i} = 0$, из которого мы получаем [4]

$$T_{ilc}(p) = T_c(p) - \frac{\sigma_{cF}}{\sigma_F^2} F(p), \quad \sigma_{ilc}^2 = \sigma_c^2 - \frac{\sigma_{cF}^2}{\sigma_F^2}. \quad (3)$$

Определим коэффициент кросс-корреляции между истинным сигналом СМВ и истинной фоновой компонентой в пиксельном пространстве как

$$\kappa = \frac{\sigma_{cF}}{\sigma_c\sigma_F}. \quad (4)$$

Тогда после подстановки уравнения (4) в уравнение (3) мы имеем [26]

$$T_{ilc}(p) = T_c(p) - \kappa \frac{\sigma_c}{\sigma_F} F(p), \quad \sigma_{ilc}^2 = \sigma_c^2(1 - \kappa^2). \quad (5)$$

Как видно из уравнения (5), температура в пикселе $T_{ilc}(p)$ и вариация σ_{ilc}^2 получаются с байесом. Разность $T_{ilc}(p) - T_c(p)$ пропорциональна κ и может быть как положительной, так и отрицательной. Для вариации σ_{ilc}^2 , байес всегда отрицательный и пропорционален $1 - \kappa^2$. Существование такого байеса не удивительно. Смещение вариации ILC и соответствующего спектра мощности обсуждается в [4, 26, 27, 29]. Тем не менее, важно заметить, что байес вариации и спектра мощности определяется космической ковариацией, которая остается неизвестной для каждой единичной реализации сигнала СМВ на небе. Это и есть причина, по которой карта не может быть исправлена какими-либо методами из-за статистической погрешности.

Описанный выше подход ILC в пространстве пикселей может быть легко обобщен для пространства мультиполей путем разложения по сферическим гармоникам: $\Delta T(\theta, \phi, \nu_i) \rightarrow a_{\ell,m}^{\nu_i}$:

$$\Delta T(\theta, \varphi, \nu_j) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell,m}^{\nu_j}| e^{i\phi_{\ell,m}} Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad (6)$$

где $|a_{\ell m}|$ and $\phi_{\ell,m}$ — модули и фазы коэффициентов разложения. Прямое преобразование уравнения (5) в мультипольные коэффициенты дает

$$\bar{c}_{\ell,m}^{ilc} = c_{\ell,m} - \kappa \frac{\sigma_c}{\sigma_F} F_{\ell,m}. \quad (7)$$

Таблица 1. Коэффициенты $K(\ell)$ для фоновых компонент V–W, Ka–V, Ka–W и Q–V, полученных с помощью MEM. Первая колонка показывает номер мультиполя ℓ .

$K(\ell)$	V – W	Ka – V	Ka – W	Q – V
2	0.999969	0.999014	0.998761	0.999481
3	0.994699	0.999534	0.995187	0.999770
4	0.996702	0.999497	0.996098	0.999708
5	0.994615	0.998862	0.995825	0.999647
6	0.995481	0.999354	0.993799	0.999563
7	0.993245	0.998620	0.995323	0.999506
8	0.994281	0.999252	0.993458	0.999575
9	0.993532	0.998781	0.994617	0.999571
10	0.994638	0.999068	0.993319	0.999463

Легко показать, что это решение для извлекаемого сигнала ILC $\bar{c}_{\ell,m}^{ilc}$ может быть получено минимизацией вариаций

$$\sigma^2 = \sum_{\ell} \frac{2\ell + 1}{4\pi} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left| \sum_j w_j a_{\ell,m}^j \right|^2. \quad (8)$$

Более того, следуя подходу ТОН, мы можем определить ILC СМВ в мультипольном пространстве, используя взвешивающие коэффициенты $W_i(\ell) \times \sum_i W_i(\ell) = 1$, и, минимизируя спектр мощности для каждого мультиполя

$C(\ell) = \sum_m |W_i(\ell) a_{\ell,m}^{(i)}|^2$. Для модели однородных спектров фоновых компонент этот подход приводит к выражению

$$c_{\ell,m}^{ilc} = c_{\ell,m} - K(\ell) \frac{(\sum_{m=-\ell}^{\ell} |\bar{c}_{\ell,m}|^2)^{\frac{1}{2}}}{(\sum_{m=-\ell}^{\ell} |F_{\ell,m}^{(2)}|^2)^{\frac{1}{2}}} F_{\ell,m}^{(2)}, \quad (9)$$

где $K(\ell)$ — коэффициент кросс-корреляции между ILC СМВ и фоном для мультиполя ℓ :

$$K(\ell) = \frac{\sum_m (c_{\ell,m}^{ilc} F_{\ell,m}^* + (c_{\ell,m}^{ilc})^* F_{\ell,m})}{2 \left[\sum_m |c_{\ell,m}^{ilc}|^2 \sum_m |F_{\ell,m}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (10)$$

Учитывая уравнения (9) и (10), можно получить

$$C^{ilc}(\ell) = C_c(\ell) [1 - K^2(\ell)]. \quad (11)$$

Перед дальнейшим анализом рассмотрим применимость модели однородных спектров фоновых компонент, полученных командой WMAP методом MEM в полосах K–W. Для этих фонов (суммы синхротрона, свободно-свободного излучения и излучения пыли в каждой полосе частот) коэффициент

кросс-корреляции между ними определяется таким же образом, как в уравнении (10) с подстановкой $F_{\ell,m}^{(j)}, F_{\ell,m}^{(k)}$ для $c_{\ell,m}^{ilc}, F_{\ell,m}$ в уравнение (9).

В Таблице 1 мы приводим коэффициенты кросс-корреляции для различных комбинаций фонов, выделенных командой WMAP с помощью MEM. Можно видеть, что соответствующие коэффициенты кросс-корреляции между различными фонами очень близки к единице. Таким образом, модель однородных спектров фоновых компонент является очень хорошо мотивированной. Как следует из уравнений (9) и (11), соответствующий байес коэффициентов ILC $c_{\ell,m}^{ilc}$ пропорционален $K(\ell)$, в то время как байес спектра мощности — порядка $K^2(\ell)$. Так как истинный СМВ представляется как случайный (гауссовый ?) процесс, коэффициент кросс-корреляции $K(\ell)$ также описывается случайным (негауссовым) процессом. Таким образом, для каждой реализации СМВ на небе, коэффициент кросс-корреляции $K(\ell)$ остается неопределенным. Заметим, что команда WMAP [27], чтобы скорректировать мощность сигнала СМВ, полученного методом ILC, рассматривала $10^2 - 10^4$ реализаций случайного гауссового СМВ, создавая статистический ансамбль реализаций. Тем не менее, даже после осреднения реализаций мы не можем предсказать байес одиночной реализации СМВ из-за космической ковариации. Более того, как видно из уравнений (9) и (11), осреднение сигнала СМВ методом ILC для ансамбля реализаций уменьшает байесовский фактор $\langle K \rangle$ до нуля, в то время как $\langle K^2 \rangle \neq 0$. Таким образом, для ансамбля реализаций коррекция мощности СМВ может быть проведена успешно, в то время как коррекция самого сигнала кажется весьма проблематичной.

Еще одна проблема связана со статистическими свойствами истинного сигнала СМВ. Хорошо известно, что низкие мультиполю ($\ell \leq 10$) СМВ в картах WMAP значительно отклоняются от статистической изотропности и однородности [36, 37]. Если этот эффект является проявлением первичной негауссовости СМВ, то мы просто не можем скорректировать модель с помощью статистического ансамбля реализаций. Это замечание еще сильнее высвечивает проблему неустойчивости восстановления низких мультиполей сигнала СМВ.

Не имея возможности дать общее решение упомянутой проблемы, мы могли бы предложить непрямой метод определения байеса в пространстве изображений и спектров, отслеживая коэффициент кросс-корреляции $K(\ell)$ в производных картах сигнала СМВ и фоновых компонент, выделенных методом MEM, включая синхротронные карты Хаслама и др. (1982) [38] (далее НА). Эта идея базируется на том факте, что в уравнении (5) кросс-корреляция ILC и фона точно равна нулю. Таким образом, если в результате применения некоторых методов дебайесинга карты ILC мы получим $K \neq 0$, это могло бы быть использовано с разумной точностью для оценки исходного коэффициента космической ковариации κ . В следующем разделе мы обсудим этот подход подробнее.

3. КРОСС-КОРРЕЛЯЦИИ ILC(I) И ILC(III) С ФОНОВЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

Как показала команда WMAP [4], коррекция СМВ методом ILC может быть проведена с использованием дополнительной информации о фоновых компонентах и 100 реализациях случайного гауссова сигнала СМВ, который скрыт в комбинации данных MEM-фона и карт WMAP в полосах K-W. Повторив метод ILC MVM для каждой из этих 100 реализаций, команда WMAP рассмотрела некоторую систематику метода ILC и внесла соответствующую коррекцию в карты ILC(III) и ILC(V).

Важно отметить, как указано в работе [4], что разность между ILC(III) и ILC(I) в основном обусловлена байесом. На Рис.1 мы показываем квадрупольную и октупольную компоненты карт первого и третьего года — ILC(I) и ILC(III) соответственно и разности между ними, чтобы проиллюстрировать коррекцию байеса, проведенную командой WMAP для низких мультиполей сигнала.

Рассмотрим кросс-корреляцию карт ILC(I) и ILC(III) с фоновыми компонентами, выделенными с помощью MEM (являющимися суммой синхротронного, свободно-свободного излучений и излучения пыли). На Рис.2 мы показываем коэффициент кросс-корреляции ILC и фона $K(\ell)$ для

мультиполей $\ell = 2 - 10$ и для MEM-фона полос K-W данных WMAP¹⁾. Мы также показываем $K_j(\ell)$ для ILC(I), ILC(III) и синхротронных карт Хаслама и др. [38]. На этом рисунке можно увидеть, что квадруполь ($\ell = 2$) и мультиполь $\ell = 5$ из ILC(III) имеют отрицательную корреляцию ($K \sim -0.5$) с фонами полос Ka-W. Более того, квадруполь ILC(III) имеет $K \sim -0.6$ с данными квадруполя НА.

3.1. Статистические свойства байеса

Чтобы понять свойства кросс-корреляции “ILC(III)—фоновые компоненты”, мы провели численный тест, рассмотрев 10000 реализаций случайных гауссовых карт СМВ, и, проведя для них кросс-корреляции с такими же моделями фоновых компонент, как на Рис.2 без дебайесинга.

На Рис.3 мы показываем функцию плотности вероятности $P(K_j(\ell))$ в зависимости от $K_j(\ell)$ для мультиполей $\ell = 2 - 10$.

Для входного случайного гауссового сигнала СМВ форма функций распределения с хорошей точностью описывается функцией

$$P(K, \ell) = A_\ell (1 - K^2)^{\ell-1}, \quad (12)$$

где A_ℓ — нормализационная константа. Используя $P(K, \ell)$ для входного сигнала, показанного на Рис.3 (сверху слева), мы нашли первый $\langle K \rangle = -0.00043$ и второй $\langle K^2 \rangle = 0.19934$ моменты для $P(K, \ell = 2)$, что находится в согласии с соответствующим значением $\langle K^2 \rangle = 0.2$ из уравнения (12).

В конце этого раздела представим функцию распределения первого и второго моментов для коэффициентов кросс-корреляции между случайными гауссовыми реализациями сигнала СМВ и фоновой компонентой. Эти моменты определяют байес сигнала ILC и спектра мощности. Неудивительно, что первый ($KP(K)$) и второй ($K^2P(K)$) моменты, показанные на Рис.4, имеют два экстремума, которые легко оцениваются из уравнения (12):

$$K_{\pm}^{n,\ell} = \pm \left(\frac{n}{2(\ell-1) + n} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

где n — порядок момента $K^n P(K)$, и ℓ — номер мультиполя. Для $\ell = 2$ мы имеем $K^{1,2} = \pm 0.577$ и $K^{2,2} = \pm 0.707$. Этот результат ясно показывает,

¹⁾Для ILC(I) мы используем MEM-фоны из данных первого года WMAP.

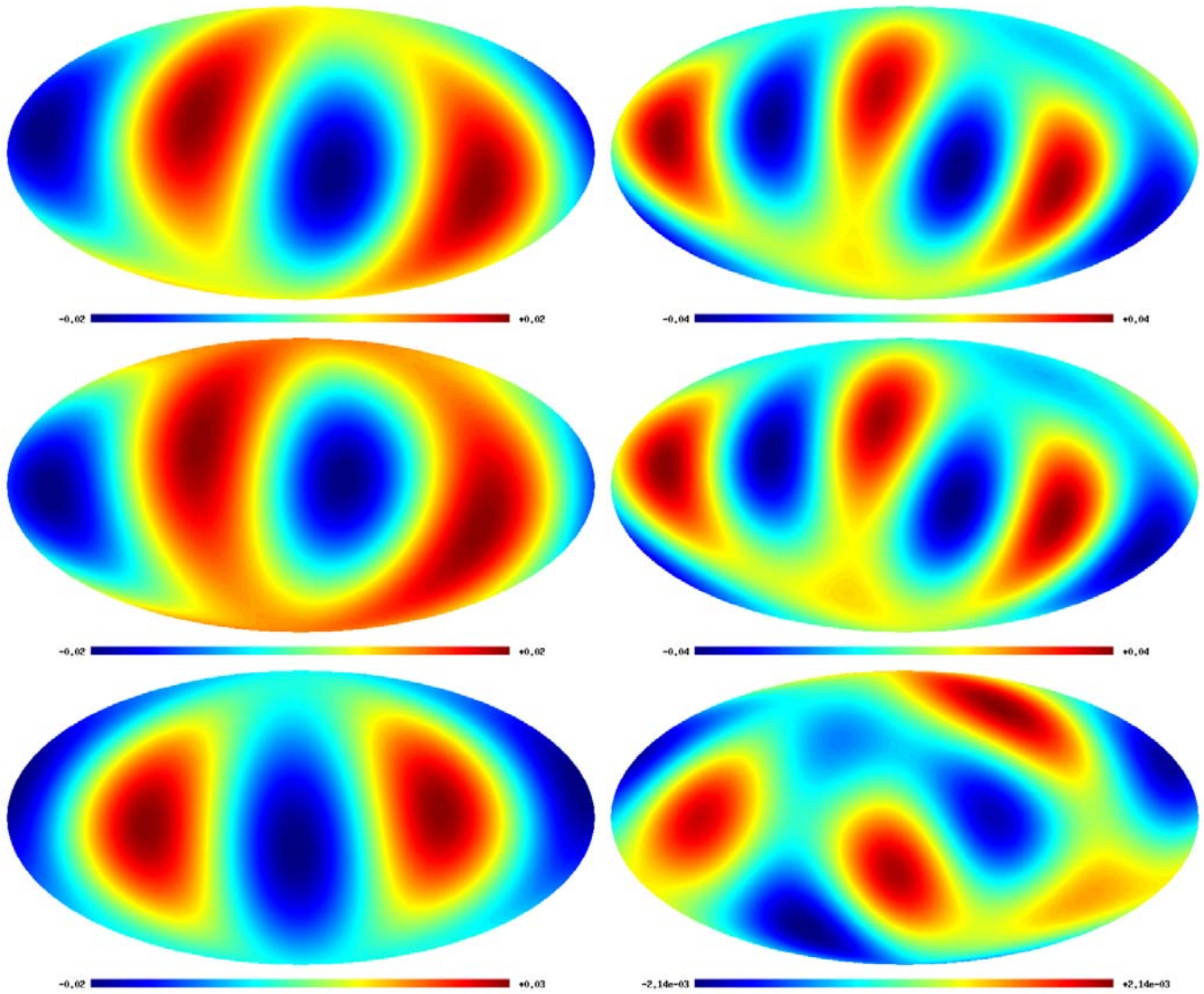


Рис. 1. Квадрупольная компонента карты ILC(I) (верхняя левая), квадрупольная компонента ILC(III) (средняя левая) и разница между ними (нижняя левая). Справа — то же для октуполя карт ILC(I), ILC(III) и их разности.

что знак коэффициента κ фиксирован, и наиболее вероятные значения K — это $K^{1,2}$, а наиболее вероятные значения K^2 — это $K^{2,2}$. Нижний график на Рис.4 показывает величину моментов $M(n) = \langle K^n P(K, \ell) \rangle$ для ансамбля реализаций случайного гауссового процесса. Для второго момента $n = 2$ форма функции $M(n)$ будет $(2\ell + 1)^{-1}$ в соответствии с оценкой [27] для байеса спектра мощности. Из уравнения (13) можно найти наиболее вероятное значение K^2 для квадрупольной компоненты: $K_{prob}^2 = 0.5$. Это говорит о том, что наиболее вероятная величина множителя $1 - K_{prob}^2$ есть 0.5, тогда из уравнения (11) мы получаем $C_c(\ell = 2) = 2C_{ilc}(\ell = 2)$. В то же время наиболее вероятная величина байеса ILC CMB определяется параметром $\kappa = K^{1,2} = \pm 0.577$. Можно видеть,

что эта величина близка к коэффициенту корреляции ILC(III) и фона.

4. ПЕКУЛЯРНОСТИ КВАДРУПОЛЯ И ОКТУПОЛЯ

В дополнение к кросс-корреляциям с фоновыми компонентами мы обнаружили еще одну особенность метода ILC, которая может иметь значительное влияние на решение проблемы квадруполя ILC(III) [39]. Мы называем это переменностью знака (флип-эффект) компоненты $(2,0)$ в квадруполе ILC по отношению к знаку квадруполя компоненты $(2,0)$ истинного CMB. Чтобы оценить численно этот эффект, вернемся к уравнениям (9) и (10) для квадрупольной компоненты $\ell = 2$ и рассмотрим моду $(2, m = 0)$:

$$|c_{2,0}^{ilc}| \cos(\xi_{2,0}) = |c_{2,0}| \cos(\eta_{2,0}) -$$

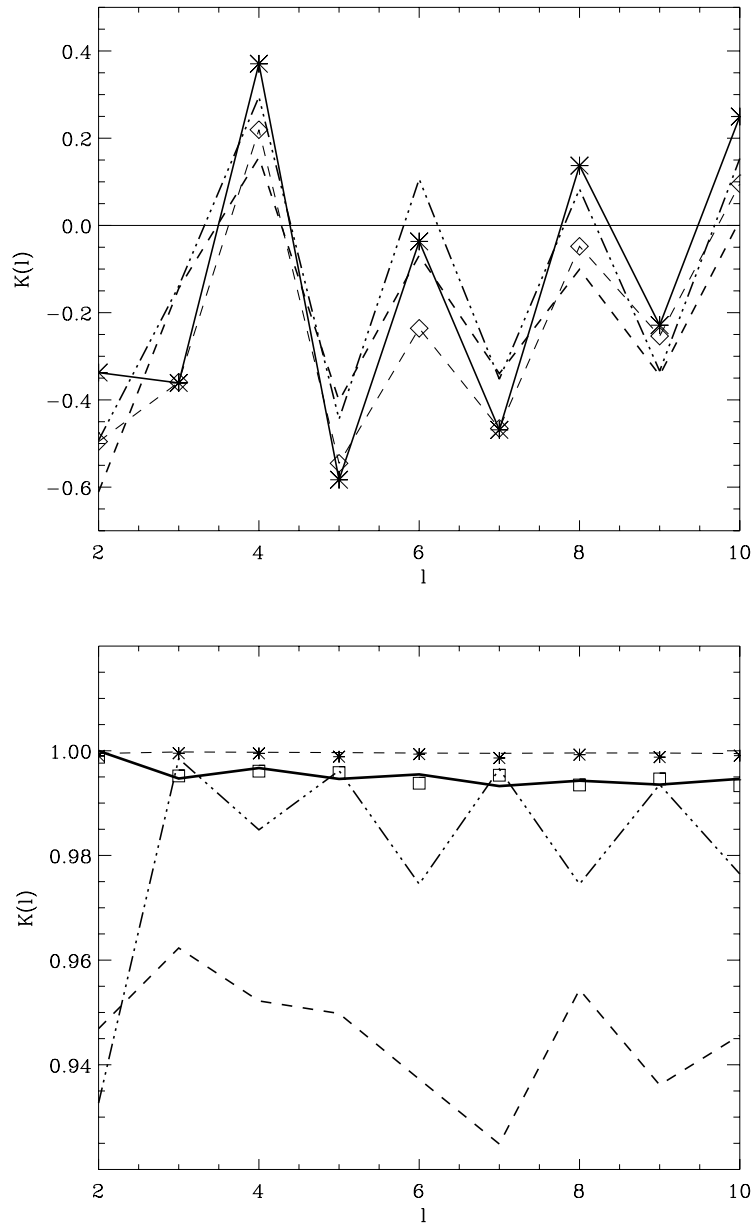


Рис. 2. Вверху — коэффициент кросс-корреляции ILC(I) и ILC(III) с фоновыми компонентами. Штриховая линия — для карты ILC (III) и НА, тройная штрих-пунктирная линия — для ILC(I) и НА, жирная сплошная линия со звездочками — для ILC(I) и V-полосы MEM-фона. Штриховая линия с ромбами — для ILC(III) и V-полосы MEM-фона. Внизу — коэффициенты кросс-корреляции между V и W фонами WMAP (жирная сплошная линия), между V и НА (пунктирная линия) и ILC(I) и ILC(III) (тройная штрих-пунктирная линия). Штриховая линия — для полос Q и V, звездочки — для полос Ka–V, квадраты для фонов Q–V.

$$\kappa \left[\frac{\sigma_c}{\sigma_F} \right]^{\frac{1}{2}} |F_{2,0}| \cos(\phi_{2,0}), \quad (14)$$

где $|\cdot|$ обозначает модуль, $\xi_{2,0}, \eta_{2,0}$ и $\phi_{2,0}$ — фазы компоненты (2,0) квадруполь ILC, истинного квадруполь и фона соответственно. Так как мода $m = 0$ имеет только вещественную часть, эти фазы просто означают знак компоненты (2,0). Для нашего буду-

щего анализа важно заметить, что для всех фоновых компонент в полосах K–W $|F_{2,0}| \gg |F_{2,1}|, |F_{2,2}|$ и $\phi_{2,0} = \pi$. Учитывая уравнение (10), можно легко найти, что

$$\kappa \simeq - \frac{|c_{2,0}| |F_{2,0}| \cos(\eta_{2,0})}{\sigma_c \sigma_F} (1 - \varepsilon),$$

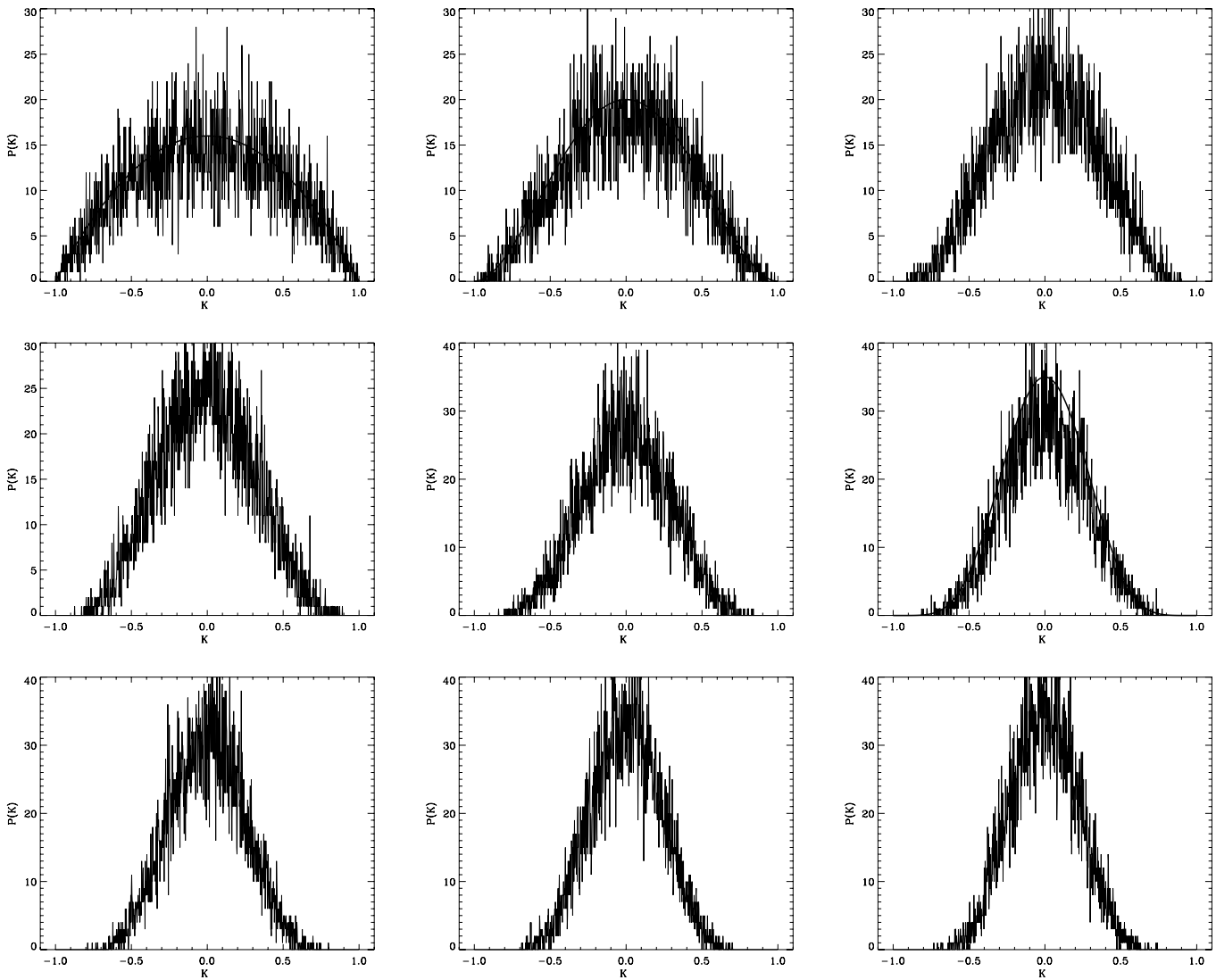


Рис. 3. Распределение функции $P(K)$ для кросс-корреляции между случайным СМВ и фоном в V-полосе (слева). Слева направо и сверху вниз показаны данные для мультиполей $\ell = 2, 3, \dots, 10$. Форма $P(K)$ такая же для любого фона в полосах K–W, включая и данные НА.

$$\varepsilon = \frac{2 \sum_{m=1}^2 |c_{2,m}| |F_{2,m}| \cos(\eta_{2,m} - \phi_{2,m})}{\cos(\eta_{2,0}) |c_{2,0}| |F_{2,0}|}, \quad (15)$$

где $\eta_{2,m}, \phi_{2,m}$ — фазы истинного СМВ и фона квадрупольных компонент $m = 1$ и $m = 2$. Таким образом, после подстановки κ из уравнения (15) в уравнение (14) мы получаем формулу (16), с помощью которой рассчитаны данные, приведенные в Таблице 2:

$$|c_{2,0}^{ilc}| \cos(\xi_{2,0}) = |c_{2,0}| \cos(\eta_{2,0}) \frac{\mu + \varepsilon}{1 + \mu}, \quad (16)$$

где $\mu = (|F_{2,1}|^2 + |F_{2,2}|^2) / |F_{2,0}|^2 \ll 1$. Из уравнения (16) следует, что если $\varepsilon \ll \mu$, тогда $\xi_{2,0} = \eta_{2,0}$ и $|c_{2,0}^{ilc}| = \mu |c_{2,0}| \ll |c_{2,0}|$. Таким образом, мода $|c_{2,0}^{ilc}|$

в карте ILC меньше, чем соответствующая $|c_{2,0}|$, примерно в μ раз. Если $\varepsilon \gg \mu$, то мы имеем

$$|c_{2,0}^{ilc}| \cos(\xi_{2,0}) \simeq \frac{2 \sum_{m=1}^2 |c_{2,m}| |F_{2,m}| \cos(\eta_{2,m} - \phi_{2,m})}{|F_{2,0}|}, \quad (17)$$

и фаза $\cos(\xi_{2,0})$ определяется знаком знаменателя в уравнении (17). Этот результат говорит нам о том, что для ряда реализаций случайного СМВ, знак входного сигнала не имеет значения. Восстановленная фаза ILC $\xi_{2,0}$ может быть такая же, как $(\eta_{2,0})$, или противоположна фазе $\eta_{2,0} \pm \pi$ истинного СМВ.

Чтобы показать, что этот эффект присутствует в численном моделировании метода ILC, мы рас-

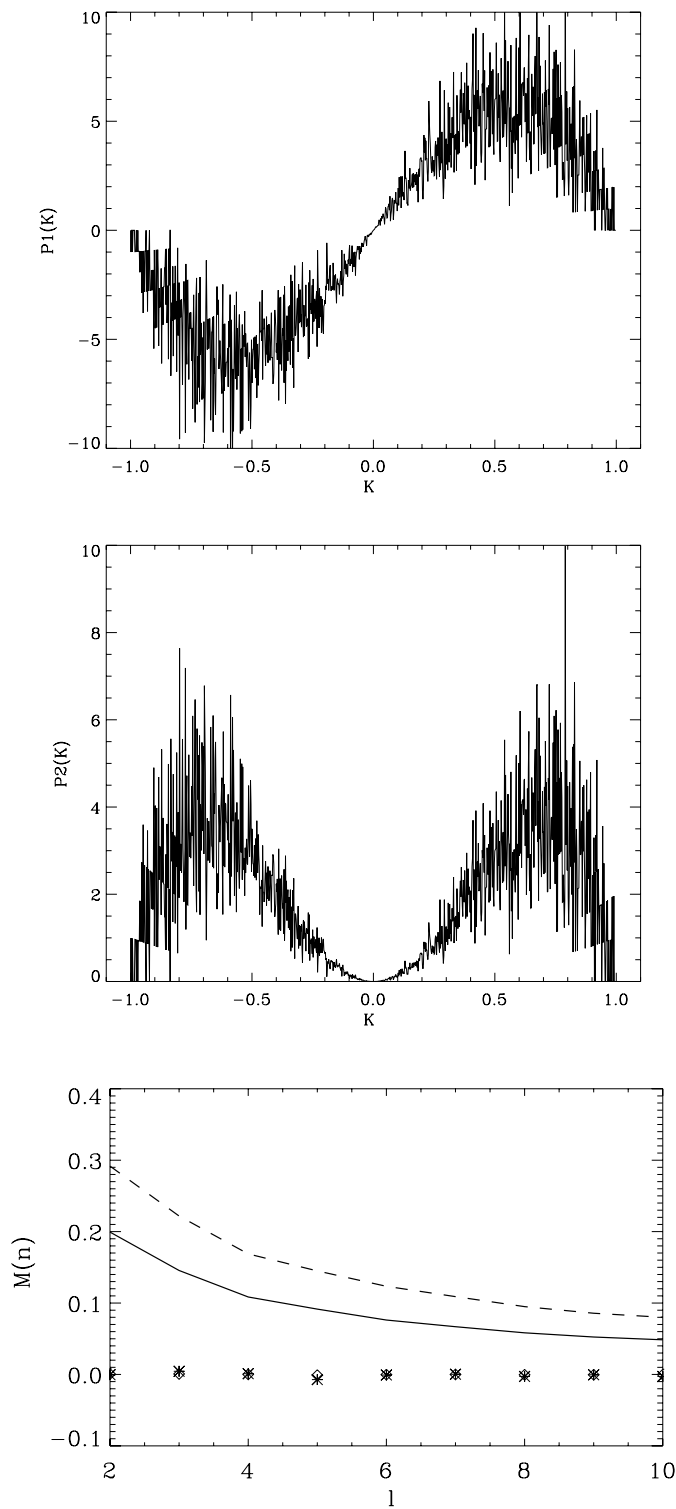


Рис. 4. Функции распределения $P1(K) = KP(K)$ (сверху) и $P2(K) = K^2P(K)$ (посередине) для кросс-корреляции между случайными реализациями сигнала СМВ и фоном в полосе V. Нижний график показывает распределение $\langle K^n(\ell) \rangle$ для $\ell = 2 - 10$. Сплошная линия соответствует $\langle K^2(\ell) \rangle$, штриховая линия — $\langle K^4(\ell) \rangle^{\frac{1}{2}}$, звездочки — $\langle K(\ell) \rangle$, ромбики — $\langle K^3(\ell) \rangle$.

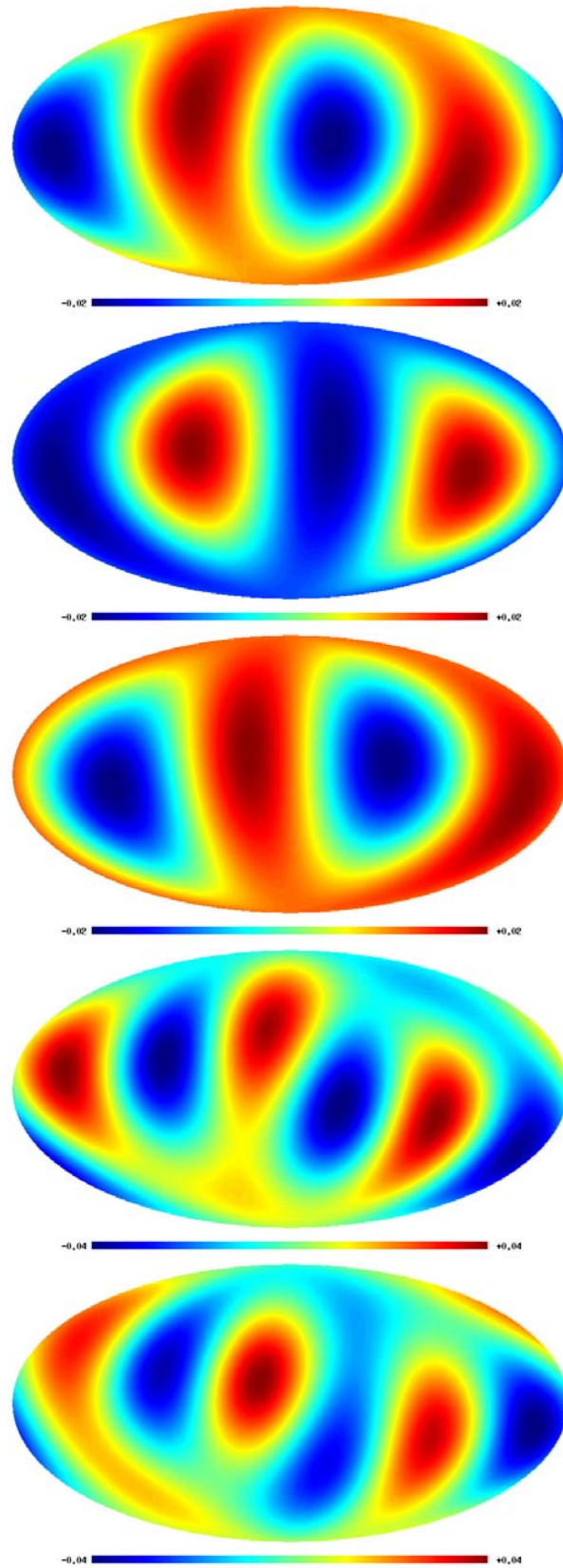


Рис. 5. Иллюстрация флип-эффекта для квадруполь и октуполь ILC(III). Сверху вниз: квадруполь ILC(III), квадруполь ILC(III) с флип-эффектом компоненты (2,0), квадруполь с флип-эффектом компоненты (2,2). Октуполь ILC(III) и он же с флип-эффектом компоненты (3,1).

Таблица 2. Число гармоник, имеющих S -коэффициенты, равные -1 , из 10000 реализаций входных и выходных карт. Верхний ряд содержит данные для квадрупольной компоненты, нижний — для октупольной. \Re и \Im обозначают вещественную и мнимые части коэффициентов $a_{\ell,m}$ разложения по сферическим гармоникам.

$\ell = 2$	2, 0	$\Re(2, 1)$	$\Im(2, 1)$	$\Re(2, 2)$	$\Im(2, 2)$	-	-
$S = -1$	2148	361	55	1756	257	-	-
$\ell = 3$	(3, 0)	$\Re(3, 1)$	$\Im(3, 1)$	$\Re(3, 2)$	$\Im(3, 2)$	$\Re(3, 3)$	$\Im(3, 3)$
$S = -1$	232	1852	337	106	367	533	355

смотрели 10000 реализаций входных и выходных карт для квадрупольной компоненты $c_{2,0}$, приведенной в работе [36]. Как показано в [4], разница между подходами WMAP и Эриксона и др. [36] в полученных картах СМВ вызвана скорее различным выбором отдельных областей в Галактической плоскости, нежели различным байесом. Используя оценку $S = s_{2,0}^{in} \times s_{2,0}^{out} = \cos \eta_{2,0}^{in} \times \cos \xi_{2,0}^{out}$, где $s_{2,0}^{in,out} = +1$ или -1 для положительного и отрицательного знака компонент $c_{2,0}^{in,out}$ соответственно, мы нашли, что для 2148 реализаций $S = -1$. Более того, так как фоны $s_{2,0}^f = -1$ для всех полос K-W данных WMAP, практически 43% реализаций, имеющих $s_{2,0}^{in} = -1$, после применения метода ILC изменяют знак и $s_{2,0}^{out} = 1$ (флип-эффект). Мы расширяем наш анализ на октупольную компоненту ансамбля входных и выходных сигналов [36] и обнаруживаем, что данный эффект также имеет место, но число событий слегка меньше, чем для квадрупольной компоненты.

В Таблице 2 мы приводим число событий для $S = -1$, где входная и выходная компоненты квадруполь и октуполь имеют различный знак.

Там же (Табл. 2) можно увидеть, что для компонент (2,0) и (3,1) число событий с $S = -1$ достигает максимума (соответственно 2148 и 1852 событий). Чтобы показать, что изменение знака компоненты (2,0) может влиять на увеличение кросс-корреляции между СМВ и фоном, мы возьмем одну из реализаций из входных карт Эриксона и др. [36], например, с именем “in-00008”, и рассчитаем коэффициент $K^{in}(\ell = 2)$ для этой карты и синхротронной карты Хаслама [38]. У нас $K^{in}(\ell = 2) = -0.222$. Для входной карты $c_{2,0}^{in} = -9.944 \mu K$. Для выходной карты СМВ, именуемой “out-00008”, $c_{2,0}^{out} = 11.457 \mu K$ и $K^{out}(\ell = 2) = -0.522$. Затем мы меняем знак компоненты $c_{2,0}^{out}$ и пересчитываем снова коэффициент кросс-корреляции. Мы имеем $K^{out}(\ell = 2) = -0.2466$, что практически является той же величиной, что и во входящей

карте. Этот пример ясно демонстрирует, что для тех входных реализаций, для которых мода $c_{2,0}^{in}$ отрицательна, эта компонента сигнала наиболее вероятно восстанавливается с противоположным знаком, увеличивая отрицательный уровень коэффициентов кросс-корреляции $K^{out}(\ell = 2)$, т.е. величина коэффициентов K зависит от перемены знака компоненты (2,0).

Чтобы показать соответствующие изменения изображений квадруполь и октуполь, обусловленные флип-эффектом, мы приводим на Рис.5 квадруполь и октуполь ILC(III) с различным знаком для компонент (2,0), (2,2) и (3,1). Как можно видеть, флип-эффект значительно меняет морфологию карт. Это — обычное явление, так как все четные моды $\ell + m$ — наиболее мощные компоненты в сигнале ILC(III).

5. ВЫВОДЫ

Мы исследовали кросс-корреляцию карт ILC(I) и ILC(III) с фоновыми компонентами, полученными с помощью MEM по данным WMAP, и показали, что эти корреляции тесно связаны с байесом сигнала СМВ, восстанавливаемого методом ILC. Используя модели Монте-Карло, мы нашли функцию распределения вероятности для коэффициента кросс-корреляции между истинным СМВ и сигналом фона. Для дебайесинга СМВ в карте ILC нам необходимо знать точное значение коэффициента $K(\ell)$. Так как метод ILC MVM не дает дополнительной информации о байесе, всякие предположения о свойствах фона должны оставить соответствующие искажения в сигнале ILC после дебайесинга и на его спектре мощности (см. для сравнения [4, 27, 29]). Эти неопределенности отражают напрямую наше незнание точного значения реализации случайного процесса $K(\ell)$, делая восстановление сигнала СМВ неустойчивым.

Есть и другая причина неустойчивости восстановления квадруполь и октуполь СМВ, имеющая отношение к байесу “СМВ – фон”. Мы обнаружили, что изменение знака происходит для четных мод $\ell + m$ (у компонент (2,0) и (2,2) квадруполь и моды (3,1) октуполь). Соответствующая вероятность

эффекта около 20% (см. Таблицу 1). Этот эффект может иметь значительное влияние на процедуру дебайесинга.

БЛАГОДАРНОСТИ

Мы признательны NASA за возможность использования открытого архива (NASA Legacy Archive) и предоставление данных VMAP. Мы также признательны авторам пакета HEALPIX²⁾ [40], используемого для расчета коэффициентов $a_{\ell m}$ из данных VMAP. Пакет GLESP³⁾ [41, 42] применялся для дальнейшего анализа данных. ОВВ благодарит РФФИ за частичную поддержку грантом No 08-02-00159.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, et al., *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1 (2003), astro-ph/0302207.
2. C. L. Bennett, R. S. Hill, G. Hinshaw, et al., *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 97 (2003), astro-ph/0203208.
3. G. Hinshaw, D. N. Spergel, L. Verde, et al., *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 135 (2003).
4. G. Hinshaw, D. N. Spergel, L. Verde, et al., *Astrophys. J. Suppl.* **170**, 288 (2007), astro-ph/0603451.
5. D. N. Spergel, R. Bean, O. Dore, et al. *Astrophys. J. Suppl.* **170**, 377 (2007), astro-ph/0603449.
6. G. Hinshaw et al., *Astrophys. J. Suppl.*, submitted, (2008), arXiv:0803.0732.
7. E. Komatsu et al., *Astrophys. J. Suppl.*, submitted, (2008), arXiv:0803.0547.
8. J. Weeks, J.-P. Luminet, A. Riazuelo, and R. Lehoucq, *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* **352**, 258 (2004), astro-ph/0312312.
9. R. Aurich, S. Lustig, F. Steiner, and H. Then, *Class. Quant. Grav.* **21**, 4901 (2004), astro-ph/0403597.
10. M. Bridges, A. N. Lasenby, and M. P. Hobson, *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* **381**, 68 (2007), astro-ph/0607404.
11. R. Bean, A. Melchiorri, and J. Silk, *Phys. Rev. D* **75**, 063505 (2007), astro-ph/0701224.
12. G. Chen, P. Mukherjee, T. Kahniashvili, et al., *Astrophys. J.* **611**, 655 (2004).
13. R. Durrer, *New Astron. Rev.* **51**, 275 (2007), astro-ph/0609216.
14. P. D. Naselsky, L.-Y. Chiang, P. Olesen, and O. V. Verkhodanov, *Astrophys. J.* **615**, 45 (2004), astro-ph/0310601.
15. T. Jaffe, A. J. Banday, H. K. Eriksen, et al., *Astrophys. J.* **629**, L1 (2005), astro-ph/0503213.
16. T. Jaffe, S. Hervik, A. J. Banday, and K. M. Górski, *Astrophys. J.* **644**, 701 (2006), astro-ph/0512433.
17. J. D. McEwen, M. P. Hobson, A. N. Lasenby, and D. J. Mortlock, *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* **359**, 1583 (2005), astro-ph/0406604.
18. J. D. McEwen, M. P. Hobson, A. N. Lasenby, and D. J. Mortlock, *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* **371**, L50 (2006), astro-ph/0604305.
19. C. Gordon, W. Hu, D. Huterer, and T. Crawford, *Phys. Rev. D* **72**, 103002 (2005), astro-ph/0509301.
20. C. J. Copi, D. Huterer, and G. D. Starkman, *Phys. Rev. D* **70**, 043515 (2004), astro-ph/0310511.
21. C. J. Copi, D. Huterer, D. J. Schwarz, and G. Starkman, *Phys. Rev. D* **75**, 023507 (2007), astro-ph/0605135.
22. D. J. Schwarz, G. D. Starkman, D. Huterer, and C. J. Copi, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 221301 (2004), astro-ph/0403353.
23. K. Land and J. Magueijo, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 071301 (2005), astro-ph/0502237.
24. P. D. Naselsky, A. G. Doroshkevich, and O. V. Verkhodanov, *Astrophys. J.* **599**, L53 (2003), astro-ph/0310542.
25. H. K. Eriksen, D. I. Novikov, P. B. Lilje, et al., *Astrophys. J.* **612**, 64 (2004).
26. L.-Y. Chiang, P. Coles, P. D. Naselsky, and P. Olesen, *J. Cosmo. Astro. Par.* **7**, 21 (2007), astro-ph/0608421.
27. R. Saha, S. Prunet, P. Jain, and T. Souradeep, *Astrophys. J.* submitted, (2007), arXiv:0706.3567.
28. M. Cruz, L. Cayon, E. Martinez-Gonzalez, et al., *Astrophys. J.* **655**, 11 (2007), astro-ph/0603859.
29. C.-G. Park, C. Park, and J. R. Gott III, *Astrophys. J.* **660**, 959 (2006), astro-ph/0608129.
30. P. D. Naselsky, A. G. Doroshkevich, and O. V. Verkhodanov, *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* **349**, 695 (2004), astro-ph/0310601.
31. P. D. Naselsky and O. V. Verkhodanov, *Int. J. Mod. Phys. D* **17**, 179 (2008), astro-ph/0609409.
32. A. Gruppuso, C. Burigana, and F. Finelli, *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* **376**, 907 (2007), astro-ph/0701295.
33. M. Tegmark and G. Efstathiou, *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* **281**, 1297 (1996).
34. M. Tegmark, A. de Oliveira-Costa, and A. Hamilton, *Phys. Rev. D* **68**, 123523 (2003), astro-ph/03022496.
35. F. K. Hansen, P. Cabella, and D. Marinucci, *Astrophys. J.* **607**, L67 (2004), astro-ph/0402396.
36. H. K. Eriksen, F. K. Hansen, A. J. Banday, et al., *Astrophys. J.* **605**, 14 (2004), astro-ph/0307507.
37. H. K. Eriksen, A. J. Banday, K. M. Górski, et al., *Astrophys. J.* **660**, L81, (2007), astro-ph/0701089.
38. C. G. T. Haslam, C. J. Salter, H. Stoffel, and W. E. Wilson, *Astronom. and Astrophys.* **47**, 1 (1982).
39. P. D. Naselsky and O. V. Verkhodanov, *Astrophysical Bulletin*, **62**, 218 (2007).
40. K. Górski, E. Hivon, A. J. Banday, et al., *Astrophys. J.* **622**, 759 (2005).

³⁾<http://www.glesp.nbi.dk>

41. A. G. Doroshkevich, P. D. Naselsky, O. V. Verkhodanov, et al., *Int. J. Mod. Phys. D* **14**, 275 (2003), astro-ph/0305537.
42. O. V. Verkhodanov, A. G. Doroshkevich, P. D. Naselsky, et al., *Bull. Spec. Astrophys. Obs.* **58**, 40 (2005).

INSTABILITY OF RECONSTRUCTION OF THE LOW CMB MULTIPOLES

P. D. Naselsky, O. V. Verkhodanov, and M. T. B. Nielsen

We discuss the problem of the bias of the Internal Linear Combination (ILC) CMB map and show that it is closely related to the coefficient of cross-correlation $K(\ell)$ of the true CMB and the foreground for each multipole ℓ . We present analysis of the cross-correlation for the WMAP ILC quadrupole and octupole from the first (ILC(I)) and the third (ILC(III)) year data releases and show that these correlations vary within from -0.52 to 0.6. Analysing 10^4 Monte Carlo simulations of the random Gaussian CMB signals, we show that the distribution function for the corresponding coefficient of the cross-correlation has a polynomial shape $P(K, \ell) \propto (1 - K^2)^{\ell-1}$. We show that the most probable value of the cross-correlation coefficient of the ILC and foreground quadrupole has two extrema at $K \simeq \pm 0.58$. Thus, the ILC(III) quadrupole represents the most probable value of the coefficient K . We analyze the problem of debiasing of the ILC CMB and pointed out that reconstruction of the bias seems to be very problematic due to statistical uncertainties. In addition, instability of the debiasing illuminates itself for the quadrupole and octupole components through the flip-effect, when the even $\ell + m$ modes can be reconstructed with significant error. This error manifests itself as opposite, in respect to the true sign of even low multipole modes, and leads to significant changes of the coefficient of cross-correlation with the foreground. We show that the CMB realizations, whose the sign of quadrupole (2, 0) component is negative (and the same, as for all the foregrounds), the corresponding probability to get the positive sign after implementation of the ILC method is about 40%.