

УДК 523.982.8

## БИЕНИЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЛН И ВОЛН РОССБИ И ИХ ВОЗМОЖНОЕ ВЛИЯНИЕ НА ФОРМИРОВАНИЕ МАГНИТНОЙ ЦИКЛИЧНОСТИ СОЛНЦА

© 2010 Р. А. Бисенгалиев<sup>1</sup>, Я. В. Есина<sup>2</sup>, Н. М. Кузьмин<sup>2</sup>, В. В. Мусцовой<sup>1</sup>, С. С. Храпов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Калмыцкий государственный университет, Элиста, Россия

<sup>2</sup>Волгоградский государственный университет, Волгоград, Россия

Поступила в редакцию 25 ноября 2009 г.; принята в печать 27 ноября 2009 г.

В данной работе в качестве возможного механизма формирования магнитной цикличности Солнца мы рассматриваем биения медленных магнитозвуковых волн и волн Россби, движущихся в разных направлениях. Закон дисперсии, полученный в рамках линейной магнитной гидродинамики однозначно указывает на наличие биений в рассматриваемой системе. Показано, что периоды таких биений варьируются в интервале от 9 до 13 лет.

Ключевые слова: *Солнце*

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Активность Солнца и, в частности, феномен солнечных пятен, привлекает внимание исследователей уже более века. Уже давно стало очевидным, что солнечные пятна образуются, когда всплывающее из нижних слоев на границу фотосферы и хромосферы вещество выносит вместе с собой мощный магнитный поток. Поскольку это вещество обжимается давлением окружающей плазмы, а магнитное поле и, соответственно, магнитное давление в нем больше, вклад термодинамического давления в полное давление в области пятна оказывается значительно меньшим, чем в соседних областях. Из-за подавления конвекции сильным магнитным полем, во всплывающем веществе температура значительно ниже температуры окружающей плазмы; как следствие, светимость в области пятна более низкая.

Вместе с тем, обращает на себя внимание тот факт, что активные области, как правило, наблюдаются в средних и низких широтах. Кроме того, регулярность их появления и часто имеющая место пространственная квазипериодичность (активные долготы) вдоль широты наводят на мысль о том, что за их формирование ответственны крупномасштабные коллективные волновые процессы. Поиск, выявление и исследование таких процессов представляются крайне актуальными.

Волны и вихри Россби представляют собой крупномасштабные возмущения во вращающихся газовых или жидких системах. Возможность существования данного класса волн обусловлена неоднородностью скорости вращения вдоль меридиана

или по радиусу, если речь идет о тонких дисках, и возникающей из-за специфического распределения сил Кориолиса сдвиговой упругости среды. Характерной особенностью таких волн является то, что времена волновых движений превосходят период оборота системы. Поскольку подавляющее большинство астрофизических объектов обладают значительным угловым моментом и развитыми газовыми подсистемами, понятно, что рассматриваемый класс возмущений играет важную роль в их динамике и эволюции.

Несмотря на это, обсуждаемый класс возмущений чаще всего остается за рамками проводимых исследований.

Отметим, что попытка привлечения волн Россби для объяснения причин формирования солнечных пятен производилась в работах [1], однако при этом далее констатации факта речь не заходила.

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, приведем несколько фактов, достоверно известных применительно к планетным атмосферам и океанам [2–5], и существенных для нашего рассмотрения:

- полученное в рамках теории мелкой воды уравнение, описывающее закон дисперсии волн в атмосферах планет и океанах, во вращающейся вместе с планетой локальной декартовой системе координат имеет вид:

$$\omega(\omega^2 - 4\Omega_z^2 - k_{\perp}^2 c_s^2) - \frac{2k_x \Omega_y}{R} c_s^2 = 0, \quad (1)$$

где  $\omega$  — частота,  $\Omega_z$  — проекция скорости вращения системы на местную вертикаль,  $\Omega_y$  — проекция скорости вращения системы на меридиан,  $c_s$  — адиабатическая скорость звука,  $R$  — радиус планеты,  $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ ,  $k_x$  — волновое число вдоль широты,  $k_y$  — вдоль меридиана. Высокочастотное решение этого уравнения ( $\omega \geq 2\Omega_z$ ) представляет собой закон дисперсии гравитационно-гироскопических волн, а низкочастотное — закон дисперсии волн Россби:

$$\omega_R = -\frac{2k_x\Omega_y}{R(k_{\perp}^2 + 4\Omega_z^2/c_s^2)}; \quad (2)$$

- вращение системы существенно влияет на динамику и свойства волновых структур, если выполняется так называемый режим (эффект) Россби, а именно:  $l_{\perp} \gg v/(2\Omega_z)$  или  $Ro = v/(2\Omega_z l_{\perp}) \ll 1$ , где  $l_{\perp}$  — масштаб структуры в плоскости, перпендикулярной местной вертикали,  $v$  — характерная скорость волновых движений,  $Ro$  — число Кибеля–Россби (малость числа Кибеля–Россби является необходимым условием существенного влияния вращения системы на свойства рассматриваемых структур); поскольку движения в волне в любом случае дозвуковые, то достаточным для режима Россби условием служит  $l_{\perp} \geq r_R = c_s/(2\Omega_z)$ , где  $r_R$  — радиус Россби–Обухова (радиус Россби–Обухова является естественным пространственным масштабом в крупномасштабной динамике атмосферы);
- обусловленные силой Кориолиса и ее неоднородностью вдоль меридиана длинноволновые возмущения в нижних широтах представляют собой волны Россби (планетарные волны), на нелинейной стадии поддерживающие или создающие зональные (вдоль широты) течения (вихри), а в средних широтах — регулярно чередующиеся циклонические и антициклонические вихри Россби, ротор скорости которых параллелен или антипараллелен вектору локальной угловой скорости вращения системы соответственно (можно сказать, что прослеживается качественная аналогия с известной задачей об электрическом дрейфе частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях (см., например, [6])) — экваториальные планетарные волны отвечают при этом движению по трахоиде без петель, а вихри Россби — по трахоиде с петлями; существует и строгая аналогия — с точностью до переобозначений

параметров в законе дисперсии, — с дрейфовыми волнами в замагниченной плазме, где температура электронов много больше температуры ионов [3]); другими характерными примерами циклонических и антициклонических вихрей Россби являются так называемые “баржи” в атмосфере Юпитера, являющееся автосоликоном Россби Большое Красное Пятно Юпитера и аналогичный автосоликон Нептуна;

- в циклонах сила Кориолиса направлена от центра вихря, поэтому в нем образуется понижение, а в антициклонах, наоборот, повышение плотности газа;
- антициклоны значительно более долгоживучи, чем циклоны, что связано с особенностями дисперсии (заметим, попутно, что из-за повышения плотности при прочих равных условиях суммарный угловой момент антициклона оказывается выше, чем у циклона, поэтому ему труднее распасться);
- вихри Россби медленно дрейфуют вдоль параллели на запад со скоростью, не превышающей  $V_{dr} \simeq V_R$ , где  $V_R = \omega_R/k_{\perp}$  — фазовая скорость волн Россби, определенная из линейного анализа — см. (2);
- наиболее интересный в прикладном смысле диапазон чисел Кибеля–Россби снизу ограничивается из соображений максимальной нелинейности режима развития волн Россби, при которой частицы среды захватываются и дрейфуют вместе с волнами или вихрями:  $Ro > r_R/R$ , где  $R$  — радиус планеты;
- условия для режима Россби выполняются тем лучше, чем больше размер системы; его проявления на планетах-гигантах значительно ярче, чем в земных условиях, что позволяет предположить наличие этого режима в звездных условиях.

В разделе 1 мы обсуждаем наблюдаемые факты, связывающие волны Россби с активными областями на Солнце, в разделе 2 описываем стационарную модель, в разделе 3 приводим основные и линейаризованные уравнения, искомое дисперсионное уравнение в общем и частном случаях, в разделе 4 обсуждаем полученные результаты, а в разделе 5 делаем основные выводы.

## 2. СВЯЗЬ АКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ С ВОЛНАМИ РОССБИ

Приведем некоторые наблюдательные факты, свидетельствующие, на наш взгляд, о возможности развития волн Россби в солнечных условиях:

1. локализация активных областей преимущественно в средних и низких широтах;

2. часто наблюдающаяся периодичность или квазипериодичность активных областей по долготе (об этом свидетельствуют данные наблюдений спутника SOHO, которые можно найти на сайте <http://sohowww.nascom.nasa.gov/>);

3. скорость дрейфа солнечных пятен сравнима с характерной скоростью дрейфа вихрей Россби:  $v_s \simeq v_R$ ;

Действительно, применительно к Солнцу, но в пренебрежении эффектами, связанными с магнитным полем, из (2) можно получить:

$$v_R = \frac{\omega_R}{k_{\perp}} = -\frac{2R_{\odot}\Omega \cos \theta}{(k_{\perp}^2 R_{\odot}^2 + 4R_{\odot}^2 \Omega^2 \sin^2 \theta / c_s^2)} \cos \varphi, \quad (3)$$

где  $\varphi$  — угол между широтой (как географической линией) и вектором  $k_{\perp}$ .

Основываясь на характерных для Солнца значениях радиуса  $R_{\odot} \simeq 6.9599(7) \times 10^8$  м, адиабатической скорости звука  $c_s \leq 6$  км/с (что отвечает температурам, меньшим 6000 К) и угловой скорости вращения  $\Omega \simeq 2.865 \times 10^{-6}$  рад/с (период обращения 25.38 сут на широте  $\theta \simeq 17^\circ$ ), определяем, что второе слагаемое в знаменателе очень мало, так как  $M^2 = R_{\odot}^2 \Omega^2 / c_s^2 \simeq 0.11$ . В то же время минимальное значение первого слагаемого (т.е. если  $k_{\perp}$  перпендикулярно меридиану) не мало. В этом случае для возмущений, имеющих  $m$  длин волн вдоль широты, находим:

$$k_{\perp} R_{\odot} = \frac{2\pi R_{\odot}}{2\pi R_{\odot} \cos \theta} m > m, \quad (4)$$

соответственно, для  $m \geq 6$  получаем  $k_{\perp}^2 R_{\odot}^2 \geq 36$ .

Таким образом, получаем приближение, выполняющееся с достаточно хорошей точностью:

$$v_R \simeq -\frac{2R_{\odot}\Omega \cos \theta}{m^2} \cos \varphi. \quad (5)$$

Вместе с тем, по данным наблюдений солнечные пятна смещаются на 0.3–0.6 гелиоцентрических градуса в сутки, причем дрейф происходит, преимущественно, на запад. Следовательно, для скорости солнечных пятен, выраженной в м/с, справедлива оценка:

$$v_s \simeq -\frac{(0.3 \dots 0.6)}{360} \times \frac{2\pi R_{\odot} \cos \theta}{24 \times 3600}. \quad (6)$$

Рассматривая отношение выражений (6) и (5) и принимая наблюдаемое значение  $m = 6$ , определяем  $v_s/v_R \simeq (0.38 \dots 0.76)/\cos \varphi$ . Итак, обсуждаемые скорости достаточно близки в широком диапазоне углов  $\varphi \simeq 0^\circ - 70^\circ$ .

Приведем, кроме того, еще некоторые оценки. Во-первых, определим радиус Россби–Обухова для не слишком низких широт:  $r_R = c_s/(2\Omega_z) \simeq (10^6 - 10^7)$  км.

Для циклон-антициклонных структур,  $m$  раз укладываемых вдоль широты, поперечный масштаб циклонических вихрей оказывается равным  $l_{\perp} = 2\pi R_{\odot} \cos \theta / (2m)$ , т.е. в средних широтах достаточное условие существования режима Россби  $l_{\perp} \geq r_R$  хорошо выполняется для всех  $m \leq 10$ .

Далее, нелинейность существенна, если для числа Кибеля–Россби, равного

$$R_o = \frac{v}{2\Omega_z l_{\perp}} < \frac{c_s}{2\Omega_z l_{\perp}}, \quad (7)$$

выполняется:

$$R_o > \frac{r_R}{R_{\odot}} = \frac{c_s}{2\Omega_z R_{\odot}}. \quad (8)$$

Сравнивая (7) и (8) с учетом выражения для  $l_{\perp}$ , определяем, что должно выполняться  $m/(\pi \cos \theta) > 1$ , что справедливо для всех  $m \geq 3$ . Таким образом, образование вихрей Россби в солнечных условиях вполне возможно.

## 3. РАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ

В качестве равновесной будем использовать модификацию модели, предложенную в [7].

Рассмотрение проводим в локальной декартовой системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  (для простоты предполагаем, что вращение Солнца твердотельно), в которой действует эффективная плотность силы тяжести  $\mathbf{g}$ , такая, что выполняется:

$$\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}} + \nabla \frac{[\Omega \mathbf{R}_{\odot}]^2}{2}, \quad (9)$$

где  $\tilde{\mathbf{g}}$  — локальное гравитационное (без учета вращения) ускорение силы тяжести,  $\mathbf{R}_{\odot}$  — радиус-вектор начала отсчета системы координат, проведенный из центра Солнца.

Пусть орт  $\mathbf{e}_z$  параллелен результирующему (с учетом вращения) вектору силы тяжести  $\mathbf{g}$ . Орт  $\mathbf{e}_y$  направим вдоль меридиана на север, а орт  $\mathbf{e}_x$  — вдоль широтной линии на восток.

Термодинамические параметры газа (плазмы) фотосферы, т.е. плотность, температуру и давление, обозначим как  $\rho$ ,  $T$  и  $P$  соответственно (для количественных расчетов ниже будем использовать численное значение  $T \simeq 6000$  К,

$\rho \simeq 10^{-7} \text{ г/см}^3$ , а давление определять из уравнения состояния идеального газа:  $P = \rho c_s^2 / \gamma$ , где  $c_s^2 = \gamma \lambda T / \mu$  — квадрат адиабатической скорости звука,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $\lambda$  — универсальная газовая постоянная,  $\mu$  — молярная масса).

Уровень атмосферы, характеризуемый (снизу) указанными выше параметрами, примем за поверхность тангенциального разрыва с вертикальной координатой  $z = 0$  с классическим условием равенства полных давлений на границе:

$$P_{in}(0) + \frac{B_{in}^2(0)}{8\pi} = P_{ex}(0) + \frac{B_{ex}^2(0)}{8\pi}. \quad (10)$$

Невозмущенную скорость течения газа в рассматриваемой локальной системе отсчета везде положим равной нулю.

Наконец отметим, что на границе фотосферы и хромосферы магнитное поле не может иметь вертикальной составляющей, так как это означало бы непрерывность магнитного поля и газового давления при переходе через слой [8]. Это, в свою очередь означает, что для горизонтального магнитного поля в силу осевой симметрии и уравнения  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  должно выполняться  $B_\theta = B_{\theta 0} / \cos \theta$ , где  $B_{\theta 0} = B_{\theta 0}(z)$  — величина  $\theta$ -компоненты магнитного поля на экваторе,  $\theta$  — по-прежнему, широта. Величину азимутальной компоненты  $B_{\varphi 0} = B_{\varphi 0}(z)$  будем считать постоянной в горизонтальной плоскости.

Обсудим, далее, вертикальный баланс сил в выбранной модели. Ее стационарность обеспечивается выполнением условия:

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} - \frac{1}{8\pi\rho} \frac{dB^2}{dz} = -\frac{1}{\gamma} \frac{dc_s^2}{dz} - \frac{c_s^2}{\gamma} \frac{d \ln \rho}{dz} - \frac{1}{8\pi\rho} \frac{dB^2}{dz}. \quad (11)$$

Полагая атмосферу изотермической при  $z \neq 0$  (т.е.  $c_s = \text{const}$ ), что достаточно хорошо согласуется с наблюдаемым распределением температуры в указанном переходном слое от фотосферы к хромосфере, и делая дополнительное предположение  $B^2(z)/\rho(z) = \text{const}$ , из (11) находим:

$$g = -\left[ \frac{c_s^2}{\gamma} + \frac{B^2(0)}{8\pi\rho(0)} \right] \frac{d \ln \rho}{dz}, \quad (12)$$

откуда при  $g = \text{const}$  вытекает:

$$\rho = \rho(0) \exp\left(-\frac{\gamma g z}{c_s^2}\right), \quad (13)$$

где

$$c_s^2 + \frac{\gamma B^2(0)}{8\pi\rho(0)} = \text{const}. \quad (14)$$

Следует отметить, что конкретный вид  $z$ -распределений параметров среды в окрестности разрыва при условии их гладкости при  $z \neq 0$  и крупномасштабности не оказывает решающего влияния на закон дисперсии. Вместе с тем выбранная модель является, с одной стороны, достаточно реалистичной, а с другой стороны, позволяет получить аналитически закон дисперсии возмущений в явном виде.

Поскольку интересующий нас класс возмущений достаточно крупномасштабен, определим, в первом приближении, изменения локальной угловой скорости вращения  $\Omega(\theta)$  и квадрата магнитного поля  $B^2(\theta)$  с широтой. За неимением более убедительных и достоверных данных, примем, что величина поля описывается соотношением:

$$B = \sqrt{B_\varphi^2 + B_\theta^2} = \sqrt{B_{\varphi 0}^2 + B_{\theta 0}^2 / \cos^2 \theta}. \quad (15)$$

Раскладывая в ряды Тейлора с точностью до линейных по малым параметрам  $\theta - \theta_0$  слагаемых, определяем, соответственно:

$$\begin{aligned} \Omega_z &= \Omega \sin \theta \simeq \Omega \sin \theta_0 + R_\odot(\theta - \theta_0) \Omega \frac{\cos \theta_0}{R_\odot} \\ &= \Omega_{z_0} + y \frac{\Omega_{y_0}}{R_\odot} = \Omega_{z_0} + f \Omega y, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} B^2 &= B_{\varphi 0}^2 + \frac{B_{\theta 0}^2}{\cos^2 \theta_0} + R_\odot(\theta - \theta_0) \frac{2B_{\theta 0}^2 \sin \theta_0}{R_\odot \cos^3 \theta_0} \\ &= B^2 + f B y. \end{aligned} \quad (17)$$

#### 4. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Исходной является система уравнений идеальной магнитной гидродинамики:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} + 2[\boldsymbol{\Omega} \mathbf{V}] - \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r} \\ &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g} - \frac{1}{8\pi\rho} \nabla B^2 + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{V}, \\ \text{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \rho + \rho \text{div} \mathbf{V} &= 0, \\ \frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) P &= c_s^2 \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \rho \right], \end{aligned} \quad (20)$$

дополненная уравнением состояния идеального газа  $\gamma P = c_s^2 \rho$ . Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор от оси вращения до точки рассмотрения ( $r = R_\odot \cos \Theta$ ).

Используя стандартную процедуру линеаризации, все величины в системе (18) – (20) представим в виде  $f + \tilde{f}$ , причем  $|\tilde{f}| \ll f$  (для возмущенной скорости справедливо  $|\tilde{\mathbf{V}}| \ll c_s$ ). Тогда, с учетом выполнения уравнений стационарного баланса сил и равенства нулю невозмущенной скорости, исходная линеаризованная система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial t} + 2[\boldsymbol{\Omega} \tilde{\mathbf{V}}] &= -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{P} + \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \mathbf{g} \\ -\frac{1}{4\pi\rho} \nabla(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{b}}) + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B}\nabla_{\perp})\tilde{\mathbf{b}} + \frac{1}{4\pi\rho} (\tilde{\mathbf{b}}\nabla)\mathbf{B}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}}{\partial t} &= (\mathbf{B}\nabla_{\perp})\tilde{\mathbf{V}} - (\tilde{\mathbf{V}}\nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{V}}, \\ \operatorname{div}\tilde{\mathbf{b}} &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{V}}\nabla)\rho + \rho\operatorname{div}\tilde{\mathbf{V}} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{V}}\nabla)P = c_s^2 \left[ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{V}}\nabla)\rho \right]. \quad (24)$$

В соответствии со сказанным выше равновесное магнитное поле полагаем горизонтальным:  $\mathbf{B} = \{B_x, B_y\}$ . Тогда выписанная в покоординатной форме система (21)–(24) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial t} - 2\Omega_z \tilde{V}_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{P} + \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{b}})}{4\pi} \right) \\ + \frac{(\mathbf{B}\nabla_{\perp})\tilde{b}_x}{4\pi\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} \tilde{b}_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{1}{4\pi\rho} \tilde{b}_z \frac{\partial B_x}{\partial z}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial t} + 2\Omega_z \tilde{V}_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{P} + \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{b}})}{4\pi} \right) \\ + \frac{(\mathbf{B}\nabla_{\perp})\tilde{b}_y}{4\pi\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} \tilde{b}_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{1}{4\pi\rho} \tilde{b}_z \frac{\partial B_y}{\partial z}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{P} + \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{b}})}{4\pi} \right) - \frac{\tilde{\rho}}{\rho} g \\ + \frac{(\mathbf{B}\nabla_{\perp})\tilde{b}_z}{4\pi\rho}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{b}_x}{\partial t} &= (\mathbf{B}\nabla_{\perp})\tilde{V}_x - \tilde{V}_y \frac{\partial B_x}{\partial y} \\ - B_x \left( \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{b}_y}{\partial t} &= (\mathbf{B}\nabla_{\perp})\tilde{V}_y - \tilde{V}_x \frac{\partial B_y}{\partial x} \\ - B_y \left( \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \tilde{b}_z}{\partial t} = (\mathbf{B}\nabla_{\perp})\tilde{V}_z. \quad (30)$$

Как следует из уравнения (30), возмущенная  $z$ -компонента магнитного поля в рассматриваемом случае зависит только от возмущения  $z$ -компоненты скорости. Поэтому система (25)–(30) допускает расщепление решений, и возможен их класс, для которого  $\tilde{b}_z \equiv 0$ ,  $\tilde{V}_z \equiv 0$ . Отметим, что данный класс возмущений для нас представляет наибольший интерес, поскольку они будут в наименьшей степени подвержены поглощению в узком нестационарном переходном слое между фотосферой и нижней хромосферой. В этом случае уравнения (25)–(27) сводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial t} - 2\Omega_z \tilde{V}_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{P} + \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{b}})}{4\pi} \right) \\ + \frac{(\mathbf{B}\nabla_{\perp})\tilde{b}_x}{4\pi\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} \tilde{b}_y \frac{\partial B_x}{\partial y}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial t} + 2\Omega_z \tilde{V}_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{P} + \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{b}})}{4\pi} \right) \\ + \frac{(\mathbf{B}\nabla_{\perp})\tilde{b}_y}{4\pi\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} \tilde{b}_y \frac{\partial B_y}{\partial y}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{P} + \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{b}})}{4\pi} \right) - \frac{\tilde{\rho}}{\rho} g = 0. \quad (33)$$

Поскольку коэффициенты полученной системы уравнений однородны по  $x$  и  $t$  (не зависят от  $x$  и  $t$ ), ищем решения в виде плоских волн (разложением по нормальным модам):  $\tilde{f} = f(y, z) \exp\{ik_x x - i\omega t\}$ . Тогда из (31) – (32) получим:

$$\begin{aligned} -i\omega V_x - 2\Omega_z V_y &= -\frac{ik_x}{\rho} P - \frac{ik_x}{4\pi\rho} B_y b_y \\ + \frac{B_y}{4\pi\rho} \frac{\partial b_x}{\partial y} + \frac{1}{4\pi\rho} b_y \frac{\partial B_x}{\partial y}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} -i\omega V_y + 2\Omega_z V_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{ik_x}{4\pi\rho} B_x b_y \\ - \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial b_x}{\partial y} - \frac{1}{4\pi\rho} b_x \frac{\partial B_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (35)$$

Чтобы учесть слабую зависимость равновесных параметров от  $y$ , умножаем (34) на  $\rho$  и дифференцируем по  $y$ . Учитывая, что эту зависимость мы представляем в виде разложения в ряд до линейных по  $y$  слагаемых, находим:

$$\begin{aligned} & -(i\omega V_x + 2\Omega_z V_y) \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} - i\omega \frac{\partial V_x}{\partial y} - 2\Omega_z \frac{\partial V_y}{\partial y} - 2f_\Omega V_y \\ &= -\frac{ik_x}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{ik_x}{4\pi\rho} B_y \frac{\partial b_y}{\partial y} - \frac{ik_x}{4\pi\rho} b_y \frac{\partial B_y}{\partial y} \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial b_x}{\partial y} + \frac{B_y}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 b_x}{\partial y^2} + \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial b_y}{\partial y} \frac{\partial B_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (36)$$

В рассматриваемом случае ( $\tilde{b}_z \equiv 0, \tilde{V}_z \equiv 0$ ) уравнения (28) – (29) сводятся к уравнениям:

$$b_x = \frac{i}{\omega} \left( B_y \frac{\partial V_x}{\partial y} - V_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial V_y}{\partial y} \right), \quad (37)$$

$$b_y = \frac{i}{\omega} \left( ik_x B_x V_y - V_y \frac{\partial B_y}{\partial y} - ik_x B_y V_x \right). \quad (38)$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_x}{\partial y} &= \frac{i}{\omega} \left( \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial V_x}{\partial y} + B_y \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right. \\ &\left. - 2 \frac{\partial V_y}{\partial y} \frac{\partial B_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 b_x}{\partial y^2} &= \frac{i}{\omega} \left( 2 \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + B_y \frac{\partial^3 V_x}{\partial y^3} \right. \\ &\left. - 3 \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \frac{\partial B_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial^3 V_y}{\partial y^3} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_y}{\partial y} &= \frac{i}{\omega} \left( ik_x B_x \frac{\partial V_y}{\partial y} + ik_x V_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \frac{\partial B_y}{\partial y} \right. \\ &\left. - ik_x B_y \frac{\partial V_x}{\partial y} - ik_x V_x \frac{\partial B_y}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Выполнив это дифференцирование, мы тем самым полностью учли слабую неоднородность коэффициентов по координате  $y$  в первом порядке по малому параметру, пропорциональному  $1/R_\odot$ . Полагая далее возмущения коротковолновыми вдоль координаты  $y$ , считаем, что коэффициенты в уравнении не зависят от  $y$ , и ищем решение в виде  $f \propto \exp\{iky y\}$ , причем  $k_y R_\odot \gg 1$ . Тогда:

$$\frac{\partial b_x}{\partial y} = \frac{i}{\omega} \left( ik_y V_x \frac{\partial B_y}{\partial y} - k_y^2 B_y V_x \right)$$

$$-2ik_y V_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + k_y^2 B_x V_y), \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 b_x}{\partial y^2} &= \frac{i}{\omega} \left( -2k_y^2 V_x \frac{\partial B_y}{\partial y} - ik_y^3 B_y V_x \right. \\ &\left. + 3k_y^2 V_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + ik_y^3 B_x V_y \right), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_y}{\partial y} &= \frac{i}{\omega} \left( -k_x k_y B_x V_y + ik_x V_y \frac{\partial B_x}{\partial y} \right. \\ &\left. - ik_y V_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + k_x k_y B_y V_x - ik_x V_x \frac{\partial B_y}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Подставляя полученные выражения в (35) и (36) и одновременно делая замену  $B_x = B \sin \alpha$ ,  $B_y = B \cos \alpha$ , получаем:

$$\begin{aligned} & -(i\omega V_x + 2\Omega_z V_y) \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} + k_y \omega V_x - 2ik_y \Omega_z V_y \\ & - 2f_\Omega V_y = \frac{k_x k_y}{\rho} P - \frac{k_\perp^2 k_y}{4\pi\rho\omega} B^2 \sin \alpha \cos \alpha V_y \\ & + \frac{k_\perp^2 k_y}{4\pi\rho\omega} B^2 \cos^2 \alpha V_x \\ & + \left( \frac{i(k_\perp^2 + k_y^2)}{4\pi\rho\omega} V_y \sin \alpha \cos \alpha - \frac{i(2k_\perp^2 + k_y^2)}{8\pi\rho\omega} V_x \cos^2 \alpha \right. \\ & \left. - \frac{ik_x k_y}{8\pi\rho\omega} V_y + \frac{ik_x k_y}{8\pi\rho\omega} V_x \sin \alpha \cos \alpha \right) \frac{\partial B^2}{\partial y}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} -i\omega V_y + 2\Omega_z V_x &= -\frac{ik_y}{\rho} P - \frac{ik_\perp^2}{4\pi\rho\omega} B^2 \sin^2 \alpha V_y \\ & + \frac{ik_\perp^2}{4\pi\rho\omega} B^2 \sin \alpha \cos \alpha V_x + \frac{1}{8\pi\rho\omega} \\ & \times (2k_y \sin \alpha \cos \alpha V_x - 3k_y \sin^2 \alpha V_y + k_x \sin \alpha \cos \alpha V_y) \\ & \times \frac{\partial B^2}{\partial y}. \end{aligned} \quad (46)$$

Введем обозначения:

$$U^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho}, \quad \mathcal{P} = \frac{P}{\rho}. \quad (47)$$

Дополняя уравнения (45) – (46) третьим, полученным исключением полной производной плотности из (23) – (24), получим систему трех уравнений с переменными  $V_x$ ,  $V_y$  и  $\mathcal{P}$ :

$$\left[ k_y \omega - i\omega \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} - \frac{k_\perp^2 k_y}{4\pi\rho\omega} B^2 \cos^2 \alpha \right] - \left[ \frac{i(2k_\perp^2 + k_y^2) \cos^2 \alpha - ik_x k_y \sin \alpha \cos \alpha}{8\pi\rho\omega} \frac{\partial B^2}{\partial y} \right] V_x$$

$$- \left[ 2ik_y \Omega_z + 2f_\Omega + 2\Omega_z \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} - \frac{k_\perp^2 k_y}{4\pi\rho\omega} B^2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{2i(k_\perp^2 + k_y^2) \sin \alpha \cos \alpha - ik_x k_y \frac{\partial B^2}{\partial y}}{8\pi\rho\omega} \right] V_y - k_x k_y \mathcal{P} = 0, \quad (48)$$

$$\left[ 2\Omega_z - \frac{ik_\perp^2}{4\pi\rho\omega} B^2 \sin \alpha \cos \alpha - \frac{k_y}{4\pi\rho\omega} \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial B^2}{\partial y} \right] V_x - \left[ i\omega - \frac{ik_\perp^2}{4\pi\rho\omega} B^2 \sin^2 \alpha + \frac{k_x \sin \alpha \cos \alpha - 3k_y \sin^2 \alpha}{8\pi\rho\omega} \frac{\partial B^2}{\partial y} \right] V_y + ik_y \mathcal{P} = 0, \quad (49)$$

$$ik_x V_x + \left( ik_y + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \right) V_y - \frac{i\omega}{c_s^2} \mathcal{P} = 0. \quad (50)$$

Из условия совместности системы, т. е. равенства нулю ее определителя, получаем искомое дисперсионное уравнение:

$$-(2k_\perp^2 + k_y^2) \cos^2 \alpha \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \frac{\partial B^2}{\partial y} = 0. \quad (51)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{c_s^2} \left( k_y - i \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \right) \omega^4 + \left( k_\perp^2 k_y - \frac{4i\Omega_z f_\Omega}{c_s^2} - ik_y^2 \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \right. \\ & \quad + \left( k_y - i \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \right) \left( \frac{4\Omega_z^2}{c_s^2} - \frac{ik_y}{\gamma} \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \right) \\ & \quad + \frac{k_\perp^2 k_y}{c_s^2} U^2 - \frac{ik_\perp^2}{c_s^2} U^2 \sin^2 \alpha \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} + \\ & \quad + \frac{k_x \sin \alpha \cos \alpha - 3k_y \sin^2 \alpha}{8\pi\rho c_s^2} \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \frac{\partial B^2}{\partial y} \\ & \quad \left. + \frac{i(2k_\perp^2 + k_y^2) \cos^2 \alpha - 3ik_y^2 \sin^2 \alpha}{8\pi\rho c_s^2} \frac{\partial B^2}{\partial y} \right) \omega^2 \\ & \quad + \left( 2k_x k_y \Omega_z \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} + \frac{f_\Omega}{\Omega_z} \right) \right. \\ & \quad - \frac{2k_\perp^2}{c_s^2} \left( f_\Omega + \Omega_z \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \right) U^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ & \quad + \frac{ik_y}{2\pi\rho c_s^2} \left( f_\Omega + \Omega_z \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \right) \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial B^2}{\partial y} \\ & \quad \left. + \Omega_z \frac{2k_\perp^2 \sin \alpha \cos \alpha - k_x k_y}{4\pi\rho c_s^2} \frac{\partial B^2}{\partial y} \right) \\ & \quad \times \omega - k_\perp^2 k_y (k_x \sin \alpha + k_y \cos \alpha)^2 U^2 \\ & \quad + \frac{ik_\perp^2 k_y}{\gamma} (k_x \sin \alpha + k_y \cos \alpha) \cos \alpha U^2 \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \\ & \quad + \frac{ik_\perp^2}{4\pi\rho c_s^2} (k_x k_y \sin^2 \alpha - (2k_\perp^2 + k_y^2) \sin \alpha \cos \alpha) \\ & \quad \quad \times \sin \alpha \cos \alpha U^2 \frac{\partial B^2}{\partial y} \\ & \quad + \frac{ik_y}{8\pi\rho} (k_\perp^2 k_x \sin \alpha \cos \alpha - k_x^2 k_y - 4k_y^3 \cos^2 \alpha \\ & \quad + 3k_y (k_x \sin \alpha + k_y \cos \alpha)^2 - 2k_\perp^2 k_y \cos^2 \alpha) \frac{\partial B^2}{\partial y} \\ & \quad + \frac{k_y}{8\pi\rho\gamma} (3k_x k_y \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

Дисперсионное уравнение (51) является крайне громоздким и содержит много параметров, что существенно затрудняет его исследование. В то же время немалый интерес представляет частный случай  $B_y = 0$  (отметим, что условие на дивергенцию магнитного поля допускает наличие такого решения даже не в локальной декартовой, а в глобальной сферической солнечной системе координат). При этом  $\sin \alpha = 1$ ,  $\cos \alpha = 0$ , все термодинамические равновесные параметры однородны по  $y$  и дисперсионное уравнение примет следующий, довольно простой, вид:

$$\omega^4 - \left( k_\perp^2 (U^2 + c_s^2) + 4\Omega_z^2 - \frac{2i\Omega_z f_\Omega}{k_y} \right) \omega^2 - k_x f_\Omega c_s^2 \omega + k_x^2 k_\perp^2 c_s^2 U^2 = 0. \quad (52)$$

В коэффициенте при квадрате частоты для солнечных значений параметров второе слагаемое заведомо меньше первого. Для оценки третьего слагаемого учтем, что выполняется:

$$f_\Omega = \frac{2\Omega \cos \theta_0}{R_\odot}, \quad (53)$$

тогда для отношения третьего слагаемого ко второму получим следующую оценку:

$$\frac{\frac{2i\Omega_z f_\Omega}{k_y}}{4\Omega_z^2} = \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \frac{1}{k_y R_\odot} \simeq \frac{1}{k_y R_\odot} \ll 1. \quad (54)$$

Это позволяет нам пренебречь мнимым слагаемым в уравнении (52), переписав его в виде:

$$\omega^4 - [k_\perp^2 (U^2 + c_s^2) + 4\Omega_z^2] \omega^2 - k_x f_\Omega c_s^2 \omega + k_x^2 k_\perp^2 c_s^2 U^2 \simeq 0. \quad (55)$$

Отметим, что пренебрежимо малое мнимое слагаемое должно быть исключено из (52), поскольку

появление мнимых коэффициентов в дисперсионном уравнении для бездиссипативной задачи нефизично.

Уравнение (55) не содержит слагаемого с третьей степенью частоты, поэтому, в принципе, допускает аналитическое решение. Однако такое решение оказывается крайне громоздким и неудобным для анализа. В силу этих соображений дисперсионное уравнение (55) в общем случае решалось численно с использованием итерационного метода Ньютона. Однако для частных случаев (а именно, высокочастотного и низкочастотного) оно имеет аналитическое решение. Для высокочастотных мод и не слишком слабых магнитных полей получаем приближенное биквадратное уравнение:

$$\omega^4 - [k_{\perp}^2(U^2 + c_s^2) + 4\Omega_z^2] \omega^2 + k_x^2 k_{\perp}^2 c_s^2 U^2 \simeq 0. \quad (56)$$

Его решение имеет вид:

$$\omega = \pm \left( \frac{k_{\perp}^2(U^2 + c_s^2) + 4\Omega_z^2}{2} \times \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4k_x^2 k_{\perp}^2 c_s^2 U^2}{[k_{\perp}^2(U^2 + c_s^2) + 4\Omega_z^2]^2}} \right] \right)^{1/2}. \quad (57)$$

В отсутствие вращения ( $\Omega_z \equiv 0$ ) решение (57) представляет собой закон дисперсии быстрых (знак “+” во втором двойном знаке) и медленных (“-”) магнито-звуковых волн, а в отсутствие магнитных полей — гравитационно-гироскопических

волн для знака “+” (перед круглыми скобками) и вырожденной ( $\omega = 0$ ) энтропийной моды для знака “-”.

Однако наибольший интерес для нас представляют низкочастотные решения, для которых выполняется:

$$(k_{\perp}^2(U^2 + c_s^2) + 4\Omega_z^2) \omega^2 + k_x f_{\Omega} c_s^2 \omega - k_x^2 k_{\perp}^2 c_s^2 U^2 \simeq 0. \quad (58)$$

Решениями данного уравнения будут :

$$\omega \simeq - (k_x f_{\Omega} c_s^2 \pm \sqrt{k_x^2 f_{\Omega}^2 c_s^4 + 4k_x^2 k_{\perp}^2 c_s^2 U^2 (k_{\perp}^2(U^2 + c_s^2) + 4\Omega_z^2)}) / (2(k_{\perp}^2(U^2 + c_s^2) + 4\Omega_z^2)), \quad (59)$$

где разность в числителе соответствует закону дисперсии медленных магнито-звуковых волн, а сумма — волн Россби.

Найденное аналитическое решение (59) на графиках, показанных на рис. 1 визуально неотличимо от численного, при этом оно позволяет непосредственно вычислить групповую скорость. Для этого воспользуемся выражением (53) и перепишем (59) в следующем виде:

$$\omega \simeq - \frac{k_x \frac{2\Omega_y}{R_{\odot}} c_s^2 \pm \sqrt{k_x^2 \left(\frac{2\Omega_y}{R_{\odot}}\right)^2 c_s^4 + 4k_{\perp}^2 k_x^2 c_s^2 U^2 (k_{\perp}^2(U^2 + c_s^2) + 4\Omega_z^2)}}{2(k_{\perp}^2(U^2 + c_s^2) + 4\Omega_z^2)} = -k_{\perp} c_s \cos \varphi \frac{\frac{\Omega_y c_s}{R_{\odot}} \pm \sqrt{\frac{\Omega_y^2 c_s^2}{R_{\odot}^2} + k_{\perp}^4 U^2 (U^2 + c_s^2) + 4k_{\perp}^2 U^2 \Omega_z^2}}{k_{\perp}^2(U^2 + c_s^2) + 4\Omega_z^2}. \quad (60)$$

Используя определение групповой скорости, находим:

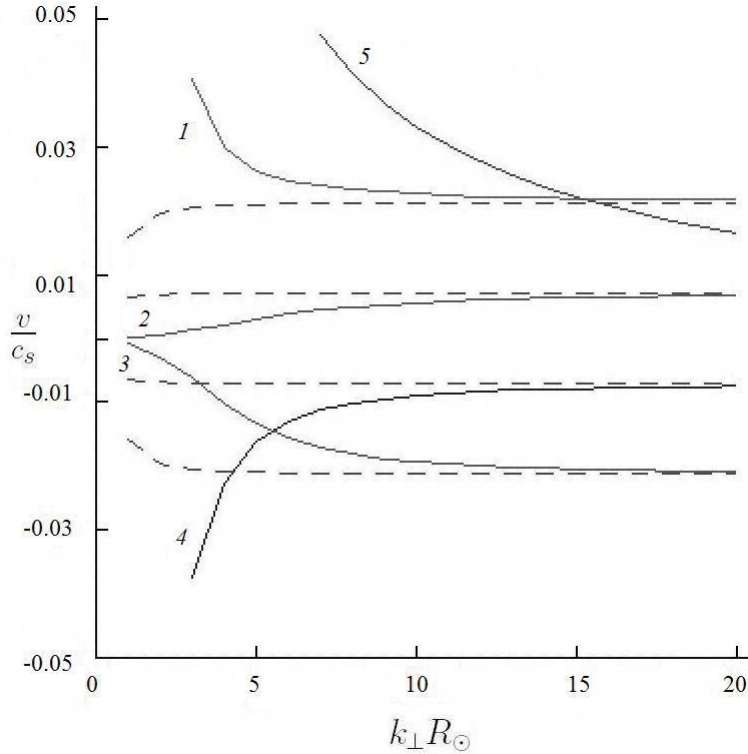
$$\frac{d\omega}{dk_{\perp}} \simeq - \frac{c_s \cos \varphi}{k_{\perp}^2(U^2 + c_s^2) + 4\Omega_z^2} \left( \frac{4\Omega_z^2 - k_{\perp}^2(U^2 + c_s^2)}{4\Omega_z^2 + k_{\perp}^2(U^2 + c_s^2)} \frac{\Omega_y c_s}{R_{\odot}} \times \sqrt{\frac{\Omega_y^2 c_s^2}{R_{\odot}^2} + k_{\perp}^4 U^2 (U^2 + c_s^2) + 4k_{\perp}^2 U^2 \Omega_z^2} \pm \left[ \frac{4\Omega_z^2 - k_{\perp}^2(U^2 + c_s^2)}{4\Omega_z^2 + k_{\perp}^2(U^2 + c_s^2)} \frac{\Omega_y^2 c_s^2}{R_{\odot}^2} + k_{\perp}^4 U^2 (U^2 + c_s^2) + 8k_{\perp}^2 U^2 \Omega_z^2 \right] \right). \quad (61)$$

С помощью аналитического выражения (59) определим возмущенные функции  $V_x$ ,  $V_y$  и  $\mathcal{P}$  из (48) – (50). С учетом сделанных выше предположений указанная система перепишется в соответ-

ствующем довольно простом виде:

$$\omega V_x - \left[ 2i\Omega \sin \theta_0 + \frac{2\Omega \cos \theta_0}{R_{\odot} k_{\perp} \sin \varphi} \right] V_y - k_{\perp} \cos \varphi \mathcal{P} = 0, \quad (62)$$





**Рис. 1.** Фазовые и групповые скорости волн, определенные из (59). 1 — групповая, 2 — фазовая скорости медленных магнитозвуковых волн, 3 — фазовая скорости волн Россби, 4 — групповая. Штриховыми линиями показаны соответствующие скорости, но в отсутствие вращения ( $\Omega \equiv 0$ ). Под линией 5 локализована область, в которой влияние эффектов вращения на возмущения существенны.  $\varphi = 45^\circ, \theta_0 = 45^\circ$ .

Введем безразмерные величины:

$$2\Omega \sin \theta_0 V_x - \left[ i\omega - \frac{ik_\perp^2 U^2}{\omega} \right] V_y + ik_\perp \sin \varphi \mathcal{P} = 0, \quad (63) \quad \tilde{z} = \frac{\omega}{k_\perp c_s}, \quad W = \frac{\Omega}{k_\perp c_s}. \quad (66)$$

$$k_\perp \cos \varphi V_x + k_\perp \sin \varphi V_y - \frac{\omega}{c_s^2} \mathcal{P} = 0. \quad (64)$$

С использованием этих замен путем несложных выкладок можно получить выражения:

Из (62) получаем:

$$V_x = \frac{k_\perp \cos \varphi}{\omega} \mathcal{P} + \frac{1}{\omega} \left[ 2i\Omega \sin \theta_0 + \frac{2\Omega \cos \theta_0}{R_\odot k_\perp \sin \varphi} \right] V_y. \quad (65) \quad V_y = \frac{1}{\tilde{z}^2 - \cos^2 \varphi} \times \frac{2W \cos \varphi}{\tilde{z} \sin \varphi} \left( i \sin \theta_0 + \frac{\cos \theta_0}{R_\odot k_\perp \sin \varphi} \right) + 1 \mathcal{P}, \quad (67)$$

$$V_x = \frac{1}{c_s \tilde{z}} \left( \cos \varphi + \frac{2W}{\tilde{z} \sin \varphi} \left[ i \sin \theta_0 + \frac{\cos \theta_0}{R_\odot k_\perp \sin \varphi} \right] \frac{\tilde{z}^2 - \cos^2 \varphi}{\frac{2W \cos \varphi}{\tilde{z} \sin \varphi} \left( i \sin \theta_0 + \frac{\cos \theta_0}{R_\odot k_\perp \sin \varphi} \right) + 1} \right) \mathcal{P}. \quad (68)$$

Подставляя последние формулы в (37) – (38), можно получить выражения для возмущенных компонент магнитного поля:

$$= \frac{B}{c_s^2 \tilde{z}^2} \times \frac{\tilde{z}^2 - \cos^2 \varphi}{\frac{2W \cos \varphi}{\tilde{z} \sin \varphi} \left( i \sin \theta_0 + \frac{\cos \theta_0}{R_\odot k_\perp \sin \varphi} \right) + 1} \mathcal{P}, \quad (69)$$

$$b_x = \frac{k_y}{\omega} B V_y$$

$$b_y = -\frac{k_x}{\omega} B V_y = -\frac{B \cos \varphi}{c_s^2 \tilde{z}^2 \sin \varphi}$$

$$\times \frac{\tilde{z}^2 - \cos^2 \varphi}{\frac{2W \cos \varphi}{\tilde{z} \sin \varphi} \left( i \sin \theta_0 + \frac{\cos \theta_0}{R_{\odot} k_{\perp} \sin \varphi} \right) + 1} \mathcal{P}. \quad (70)$$

Весьма существенным для дальнейшего изложения является тот факт, что хотя в рассматриваемом нами случае  $\tilde{b}_z \equiv 0$ ,  $\tilde{V}_z \equiv 0$ , вертикальная компонента волнового вектора ненулевая. В этом можно убедиться, подставляя (69) в уравнение (33), описывающее изменение полного давления вдоль  $z$ -координаты. В результате получается обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} = -\frac{g}{c_s^2(1+F)} \tilde{P}, \quad (71)$$

где

$$F = \frac{U^2}{c_s^2 \tilde{z}^2} \times \frac{\tilde{z}^2 - \cos^2 \varphi}{\frac{2W \cos \varphi}{\tilde{z} \sin \varphi} \left( i \sin \theta_0 + \frac{\cos \theta_0}{R_{\odot} k_{\perp} \sin \varphi} \right) + 1}. \quad (72)$$

Решением уравнения (71) для функции возмущенного термодинамического давления будет:

$$\hat{P}(0) \exp \left\{ -\frac{g}{c_s^2(1+F)} z + ik_x x + ik_y y - i\omega t \right\}, \quad (73)$$

где  $\hat{P}(0)$  — амплитудное значение возмущенного давления при  $z = 0$ .

Имея в виду дальнейшие вычисления, оценим величину отношения  $g/c_s^2$  для солнечных значений параметров  $R_{\odot} \simeq 6.9599(7) \times 10^8$  м,  $c_s \lesssim 6$  км/с,  $g \simeq 0.274$  км/с<sup>2</sup>; находим:

$$\frac{R_{\odot} g}{c_s^2} \simeq 5.32(7) \times 10^3. \quad (74)$$

Из (72) очевидно, что  $F$  является комплексной величиной. Следовательно комплексной величиной

$$\tilde{z} \simeq \frac{-\frac{W \cos \theta_0 \cos \varphi}{k_{\perp} R_{\odot}} \pm \sqrt{\frac{W^2 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \varphi}{k_{\perp}^2 R_{\odot}^2} + A^2 \cos^2 \varphi [4W^2 \sin^2 \theta_0 + 1 + A]}}{4W^2 \sin^2 \theta_0 + 1 + A}. \quad (78)$$

При этом для  $W$  выполнено:

$$W = \frac{\Omega}{k_{\perp} c_s} = \frac{M}{m} \cos \theta_0 \cos \varphi, \quad (79)$$

где для солнечных значений параметров справедливо:

$$M \simeq \sqrt{0.11}, \quad m = 6. \quad (80)$$

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 1 мы приводим дисперсионные кривые фазовых скоростей медленных магнитозвуковых

является и коэффициент при  $z$  в экспоненте в (73). Его мнимая часть описывает осцилляции возмущенного давления вдоль вертикальной координаты, а действительная — затухание амплитуды этого давления с высотой.

Для численных расчетов и последующей визуализации полученных результатов в дополнение к уже введенным безразмерным величинам (66) добавим:

$$A = \frac{U}{c_s}. \quad (75)$$

Тогда дисперсионное уравнение (55) переписывается в следующем виде:

$$\tilde{z}^4 - [4W^2 \sin^2 \theta_0 + 1 + A] \tilde{z}^2 - \frac{2W \cos \theta_0 \cos \varphi}{k_{\perp} R_{\odot}} \tilde{z} + A^2 \cos^2 \varphi \simeq 0. \quad (76)$$

При  $A \gtrsim 1$ ,  $k_{\perp} R_{\odot} \gg 1$  получаем решения:

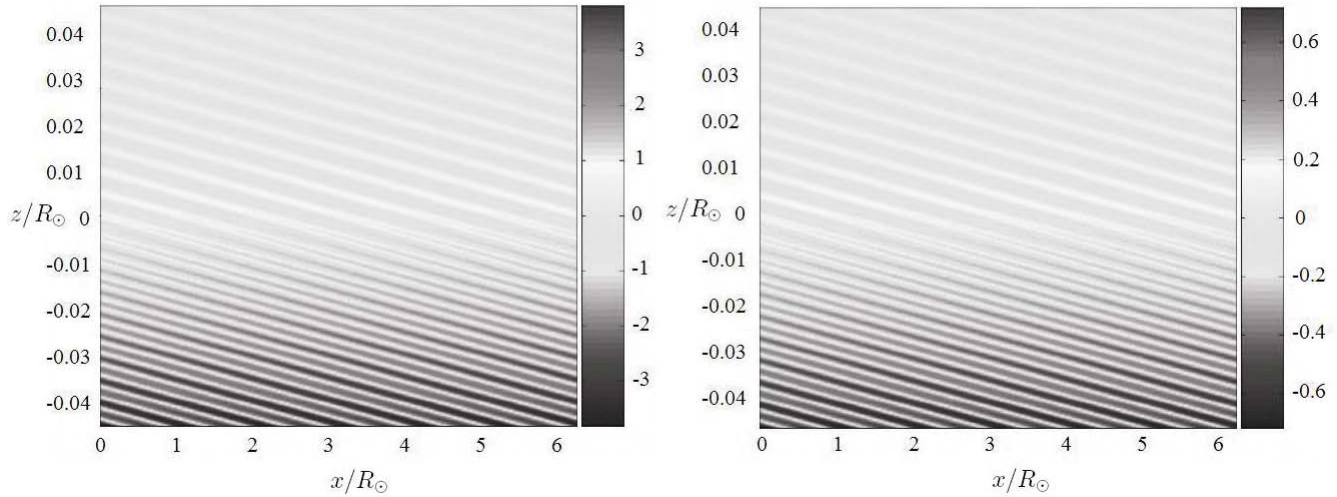
$$\tilde{z} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \pm [1 + A + 4W^2 \sin^2 \theta_0 \pm \sqrt{(1 + A + 4W^2 \sin^2 \theta_0)^2 - A^2 \cos^2 \varphi}]^{1/2}, \quad (77)$$

представляющие собой быстрые (“+” во втором двойном знаке) и медленные (соответственно “−”) магнитогидродинатические гравитационно-гироскопические волны.

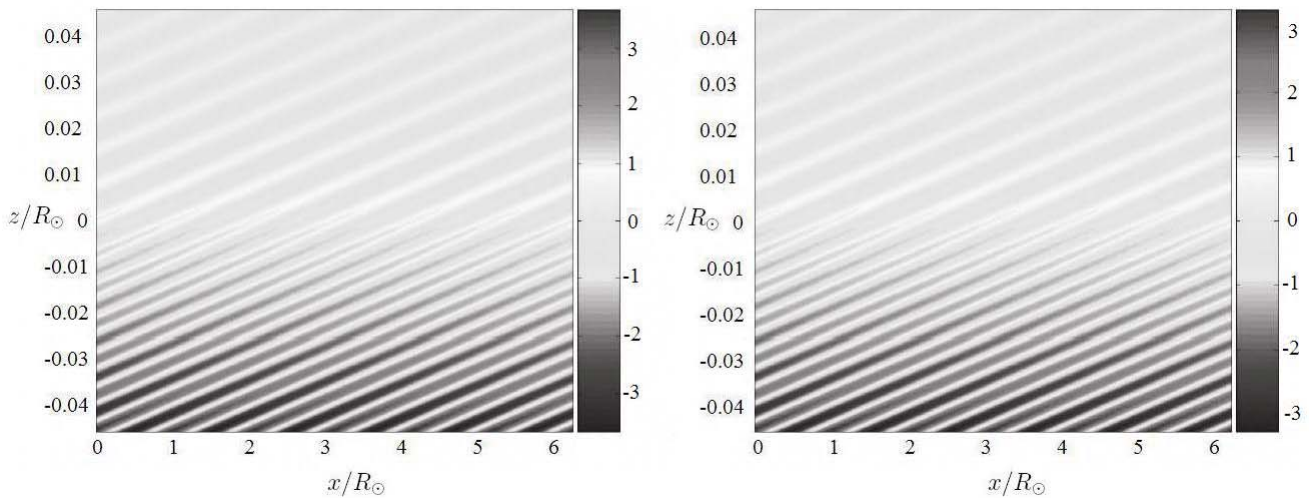
При  $A \ll 1$ ,  $|\tilde{z}| \ll 1$ , медленные магнитогидродинатические гравитационно-гироскопические волны подвержены эффекту Россби:

волн, построенные в соответствии с (59). Штриховыми линиями показаны аналогичные кривые в отсутствие вращения. Видно, что распространяющаяся на запад медленная магнитозвуковая волна подвержена ярко выраженному эффекту Россби. На том же рисунке показаны отвечающие этим фазовым скоростям групповые скорости, вычисленные в соответствии с (61). Интересен тот факт, что если фаза волны распространяется на запад, то пакет этих волн будет дрейфовать на восток и наоборот.

Вращение существенно влияет на динамику волновых структур, если для числа Кибеля—



**Рис. 2.** Линии уровня возмущенного полного (слева) и термодинамического (справа) давлений на вертикальном срезе для волн Россби, распространяющихся на Запад.



**Рис. 3.** Линии уровня возмущенного полного (слева) и термодинамического (справа) давлений на вертикальном срезе для медленных магнитозвуковых волн, распространяющихся на Восток.

Россби выполняется:

$$R_o = \frac{v_{gr}}{2\Omega_z l_{\perp}} \ll 1, \quad (81)$$

где  $v_{gr}$  — групповая скорость волны,  $l_{\perp}$  — ее горизонтальный масштаб. Это приводит к неравенству:

$$\frac{v_{gr}}{c_s} \ll 4\pi \frac{\Omega \sin \theta_0}{k_{\perp} c_s} = 4\pi W. \quad (82)$$

На рис. 1 линию, отвечающую выполнению условия (82) мы поместили цифрой 5.

На рис. 2, 3 мы показываем линии уровня возмущений термального и полного (с учетом магнитного) давлений на плоскости вертикального среза

для обеих обсуждаемых ветвей медленных магнитозвуковых волн. Как представляется, формирование показанных на рис. 2, 3 наклонных каналов пониженного давления должно способствовать всплытию вещества вдоль этих каналов из нижних слоев. При этом такое всплытие должно происходить более эффективно под действием распространяющейся на запад волны Россби (поскольку формируемые волнами Россби каналы пониженного давления распространяются против локальной скорости вращения Солнца, существует вероятность, что "нагревание" в них вещества из подфотосферных слоев будет происходить эффективней).

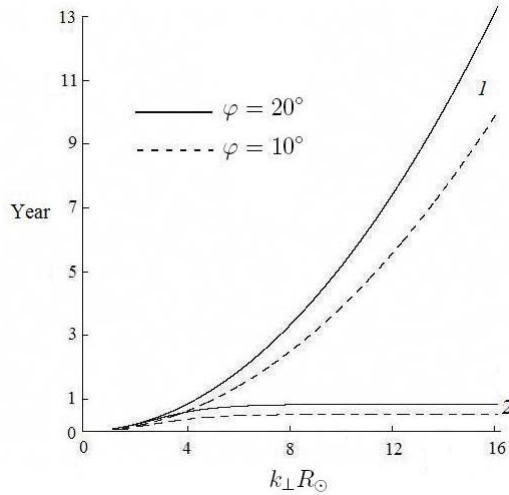


Рис. 4. Периоды биений 1, отвечающие несущей частоте 2.  $\theta_0 = 45^\circ$ .

Важным результатом представляется то, что закон дисперсии (59) однозначно свидетельствует о наличии в рассматриваемой системе биений. Действительно, рассматривая для простоты и наглядности слой  $z = 0$ , возмущения одинаковой амплитуды с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и выделяя в выражении (73) их действительные части (поскольку, очевидно, только они имеют физический смысл), для суперпозиции таких возмущений получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{P} = & \hat{P}(0) \cos(k_x x + k_y y - \omega_1 t) \\ & + \hat{P}(0) \cos(k_x x + k_y y - \omega_2 t) = \hat{P}(0) \\ & \times \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(k_x x + k_y y - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right). \end{aligned} \quad (83)$$

Поскольку  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , согласно (59), близки по величине, но противоположны по знаку, будут иметь место колебания на несущей частоте  $(\omega_2 - \omega_1)/2$ , модулированные с частотой  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  в каждой фиксированной точке рассматриваемой горизонтальной плоскости.

Отметим, что такие биения в принципе не могли быть обнаружены ни в магнитогиродинамической постановке задачи без учета вращения — при этом для медленных магнитозвуковых волн  $|\omega_1| \equiv |\omega_2|$  и, следовательно,  $\omega_1 + \omega_2 \equiv 0$ , — ни в задаче с вращением, но без магнитного поля, так как при этом одна из энтропийных ветвей является вырожденной —  $\omega_2 \equiv 0$  (отвечающая знаку “—” в асимптотике (59)).

Используя (59), определяем в явном виде несущую частоту и частоту биений соответственно:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{k_x^2 f_\Omega^2 c_s^4 + 4k_x^2 k_\perp^2 c_s^2 U^2 (k_\perp^2 (U^2 + c_s^2) + 4\Omega_z^2)}}{k_\perp^2 (U^2 + c_s^2) + 4\Omega_z^2}, \quad (84)$$

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = -\frac{k_x f_\Omega c_s^2}{k_\perp^2 (U^2 + c_s^2) + 4\Omega_z^2}. \quad (85)$$

Как следует из (59), для достаточно слабых магнитных полей ( $U^2 \ll c_s^2$ ) частота биений очень слабо зависит от величины поля и практически совпадает с частотой волн Россби для чисто гидродинамического случая.

На рис. 4 мы показываем зависимости периодов, определенных на основе (84) — (85), от  $k_\perp R_\odot$  для типичных солнечных значений параметров.

Кроме этого, было численно исследовано общее дисперсионное уравнение (51). Результаты численного решения приведены на рис. 5, на котором также хорошо видно, что в длинноволновой области для случаев  $\varphi = 10^\circ$ ,  $\varphi = 20^\circ$  асимметрия по фазовой скорости волны способна приводить к биениям.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении сформулируем основные выводы работы.

1. Мощные магнитные поля подавляют волновые эффекты, связанные с вращением.

2. Для наблюдаемых “солнечных” значений магнитных полей от нескольких Гс до нескольких кГс эффект Россби выражен на ветви медленных магнитозвуковых волн, распространяющихся против направления локальной линейной скорости вращения Солнца.

3. Закон дисперсии допускает существование волн Россби, имеющих только горизонтальные компоненты возмущенных векторов скорости и магнитного поля; при этом вертикальная компонента волнового вектора ненулевая, т.е. возмущения являются бароклиными, а не баротропными.

4. Линии минимума возмущенного давления наклонены к горизонтальной плоскости, из-за чего через такие “каналы” становится возможным всплытие вещества из нижних слоев, где более высокое давление и давление магнитного поля.

5. Суперпозиция распространяющихся на восток медленных магнитозвуковых волн и распространяющихся на запад волн Россби приводит к долгопериодическим биениям на фоне короткопериодических колебаний на несущей частоте. Представляется, что такие биения могут способствовать выносу замагниченной плазмы из глубоких слоев на поверхность Солнца и влиять на развитие солнечной активности с периодами от 9 до 13 лет.

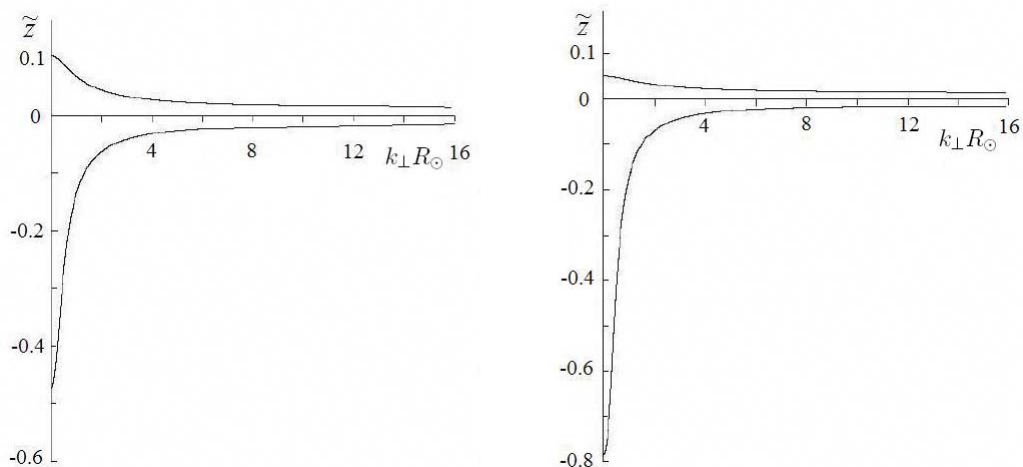


Рис. 5. Зависимости безразмерной фазовой скорости от безразмерного волнового числа для случаев  $\varphi = 10^\circ$  (слева),  $\varphi = 20^\circ$  (справа),  $\alpha = \theta_0 = 45^\circ$ .

Основным же результатом настоящей работы нам представляется то, что биениями МГД-волн Россби, распространяющихся на Запад и распространяющихся в противоположном направлении ММЗВ удается объяснить, почему расположенные с большим пространственным периодом (на активных долготах) активные области локализуются на низких и средних широтах и, преимущественно, вдоль одной широты.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы признательны А.А. Соловьеву, А.В. Степанову и М.Е. Прохорову за конструктивные замечания и полезные обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Y.Q. Lou, *Astrophys. J. Suppl.* **540**, 1102 (2000).

2. C.G. Rossby, *J. Mar. Res.* **2**, 38 (1939).

3. М.В. Незлин, Е.Н. Снежкин, *Вихри Россби и спиральные структуры: Астрофизика и физика плазмы в опытах на мелкой воде* (Наука, Москва, 1990), с. 240.

4. Дж. Педлоски, *Геофизическая гидродинамика*, (Мир, Москва, 1984), т. 1, с. 398.

5. А. Гилл, *Динамика атмосферы и океана*, (Мир, Москва, 1986).

6. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля*, (Наука, Москва, 1988), с. 512.

7. В.В. Мусцевой, А.А. Соловьев, *Астрон. журн.* **74**, 254 (1997).

8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, (Наука, Москва, 1982), с. 620.

## BEATS OF MAGNETOHYDRODYNAMICAL AND ROSSBY WAVES AND THEIR POSSIBLE EFFECT ON THE FORMATION OF SOLAR CYCLICITY

R.A. Bisengaliev, Ya.V. Esina, N.M. Kuz'min, V.V. Mustsevoi, S.S. Khrapov

We analyze the beats of slow magneto-acoustic and Rossby waves propagating in different directions as a possible mechanism of formation of the magnetic cyclicality of the Sun. The dispersion law derived in terms of linear magnetohydrodynamics unambiguously indicates the presence of beats in the system. We demonstrate that the periods of such beats vary from 9 to 13 years.

Key words: *Sun: oscillations*