

УДК 524-32:52-17

СЛУЧАИ ДАЛЬНЕЙШЕЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЛОКАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ. II

© 2025 Ф. Т. Шамшиев^{1*}¹Национальный университет Узбекистана, Ташкент, 100174 Узбекистан

Поступила в редакцию 1 мая 2024 года; после доработки 22 октября 2024 года; принята к публикации 29 октября 2024 года

Один частный случай локального интеграла, опубликованный Шамшиевым в 2024 году, приводит на больших расстояниях r асимптотически к потенциалу с почти сферической симметрией. Найдены поверхности $L(x, y, z) = \text{const}$, дающие границы области движения и близкие к сферам.

Ключевые слова: *методы: численные — звездная динамика: уравнение движения*

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДАННОГО ВАРИАНТА

Локальный интеграл Антонова, введенный в звездную динамику, в отличие от настоящего интеграла, вообще говоря, не позволяет найти сами траектории звезды (частицы), а только инвариантные множества в фазовом пространстве (Antonov, 1981; Antonov and Shamshiev, 1992; 1993; Shamshiev, 1995; 2022). Однако возможны случаи полного нахождения траектории или области движения и с локальным интегралом (Antonov and Shamshiev, 1994; Shamshiev, 2024).

В этой работе мы продолжаем изучение разных вариантов частичной интегрируемости задачи о движении в трехмерном потенциальном поле, начатое в предыдущей статье (Shamshiev, 2024). Рассматриваем случай, отмеченный там как второй вариант (см. с. 155–156, Shamshiev, 2024). Используем без специальных оговорок все обозначения первой статьи.

Для начала выясним геометрический смысл условия $a = 0$. Перейдем от оси x к близкой прямой с $n_y = \varepsilon, n_z = 0$. Для обратного совмещения ее с осью абсцисс необходим поворот в плоскости Oxy , превращающий x, y в $x + \varepsilon y, y - \varepsilon x$ и n_x, n_y в $n_x + \varepsilon n_y, n_y - \varepsilon n_x$ при условии пренебрежения поправками ε^2 . Тогда функция χ превращается в

$$\chi = -\varepsilon (An_y + 3an_y^2 + 2bn_y n_z + cn_z^2 + \dots). \quad (1)$$

Далее надлежит новую точку на поверхности $L = 0$ вернуть в начало координат параллельным переносом по y . При этом исчезает линейный по n_y

член в уравнении (1). Наконец, член с $n_y n_z$ можно устранить малым поворотом в плоскости Oyz , не влияющим с принятой точностью на коэффициенты при квадратах. Это построение дает нам формулы дифференцирования:

$$\frac{\partial A}{\partial n_y} = -6a, \quad \frac{\partial B}{\partial n_y} = -2c \quad (2)$$

и симметрично

$$\frac{\partial A}{\partial n_z} = -2b, \quad \frac{\partial B}{\partial n_z} = -6d.$$

Из формулы (40) нашей предыдущей статьи (Shamshiev, 2024) ясно, что при $a = 0$ радиус кривизны A не меняется, если сдвинуться вдоль поверхности $L = 0$ на бесконечно малое расстояние по y , и что при этом нормали пересекаются в одной точке (с точностью до несущественных поправок $O(\varepsilon)^2$). Следовательно, имеется линия, все нормали к которой сходятся в одной точке. Точки этой линии, очевидно, принадлежат некоторой одной сфере. Другие линии на той же поверхности $L = 0$ принадлежат другим сферам. Центры сфер должны образовывать некоторую кривую

$$x = x_0(\xi), \quad y = y_0(\xi), \quad z = \xi. \quad (3)$$

Соответственно, поверхность $L = \text{const}$ представляет собой огибающую к сферам с указанными центрами и радиусами $A(\xi) + L$. Сферы этого семейства имеют уравнения

$$(x - x_0(\xi))^2 + (y - y_0(\xi))^2 + (z - \xi)^2 = (L + A(\xi))^2, \quad (4)$$

и по общему правилу уравнение огибающей поверхности получается исключением параметра ξ из

*E-mail: shamshiev_f@nuu.uz

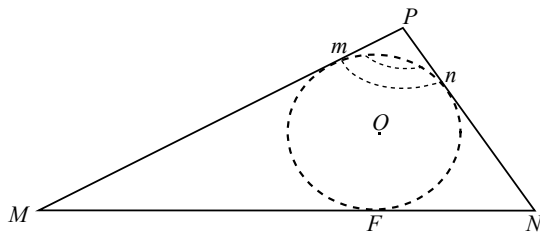


Рис. 1. Сечение кругового конуса с вписанной сферой, образующего в пересечении с плоскостью Oxz эллипс (кривую 2-го порядка Γ): P — вершина конуса (точка Γ_1), MN — большая ось эллипса, F — фокус эллипса, O — центр сферы.

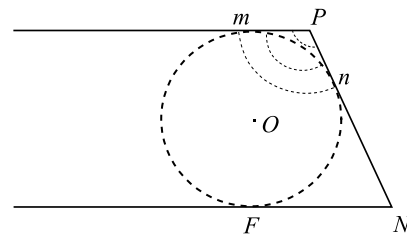


Рис. 2. Сечение кругового конуса с вписанной сферой, образующего в пересечении с плоскостью Oxz параболу (кривую 2-го порядка Γ): P — вершина конуса (точка Γ_1), MN — большая ось эллипса, F — фокус эллипса, O — центр сферы.

(4) и результата дифференцирования (4) по параметру

$$(x_0(\xi) - x)x'_0(\xi) + (y_0(\xi) - y)y'_0(\xi) + \xi - z = (L + A(\xi))A'(\xi). \quad (5)$$

При этом

$$n_x = \frac{x - x_0(\xi)}{L + A(\xi)}, n_y = \frac{y - y_0(\xi)}{L + A(\xi)}, n_z = \frac{z - \xi}{L + A(\xi)},$$

а из (4) видно, что на единичной сфере

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (6)$$

Для каждого ξ возможные значения n_x, n_y, n_z удовлетворяют некоторому линейному неоднородному соотношению, и соответствующие точки на единичной сфере (6) образуют поэтому каждый раз окружность. Точнее говоря, это малый круг. В случае пункта а) второго варианта первой части работы (с. 155–156, см. Shamshiev, 2024) на единичной сфере должна получаться совершенно аналогично еще вторая однопараметрическая система малых кругов, по построению ортогональная первой.

Требование ортогональности в данном контексте оказывается весьма жестким. Действительно, уже для двух окружностей однозначно задано множество (пучок) ортогональных к ним окружностей, проходящих через две общие вещественные или мнимые точки (Vlasov, 2021). (Обычно эту теорему формулируют в плоской геометрии, но переход к окружностям, заданным на сфере, элементарно осуществляется стереографической проекцией.) Всегда можно представлять, что указанные пары точек лежат в плоскостях $On_x n_y$ и $On_x n_z$, кроме совсем уж простого случая системы параллелей и соответствующих меридианов. Тогда и две кривые типа (3), которые мы будем далее обозначать Γ и Γ_1 , располагаются в плоскостях Oxz и Oyz , поскольку в них, согласно (5), совершаются повороты осей конусов. При этом искомыми нормальными являются те прямые, которые соединяют

произвольную точку Γ с произвольной точкой Γ_1 . При фиксации точки на Γ эти прямые образуют, как мы знаем, круговой конус, так что в пересечении с плоскостью Oyz должна получиться кривая второго порядка Γ_1 и обратно, при фиксации точки на Γ_1 , получаем кривую второго порядка Γ . Прямые в данном случае исключаются, потому что прямая в роли Γ или Γ_1 породила бы на единичной сфере семейство больших кругов, а это, согласно (5), означало бы $A'(\xi) = 0$ и постоянство A , что относится уже к третьему варианту первой части работы.

Предположим сначала, что Γ — эллипс. Точки Γ_1 характеризуются тем, что могут служить вершинами кругового конуса, опирающегося на Γ . Известно, что можно построить вспомогательную сферу, касающуюся плоскости Oxy в одном из фокусов эллипса так, что эта сфера окажется вписанной и в сам конус (Vlasov, 2021). Точка P может находиться только точно над большей осью эллипса (рис. 1). В противном случае, если представить себе внутреннюю область эллипса как тень шара при источнике света в P , каждое горизонтальное сечение шара дало бы тень, смещенную относительно большей оси в определенную сторону, а объединение таких смещенных теней не могло бы дать симметрическую фигуру. Поскольку $MF = Mm$, $NF = Nn$ и $mP = nP$, имеем $MP - PN = MF - FN$, то есть расстояния P от обеих вершин эллипса различаются на его удвоенное фокусное расстояние. Это характерное свойство гиперболы, которая в данном случае имеет главную ось эллипса своей вещественной осью, проходящей через его фокусы. И наоборот, вершины эллипса служат фокусами гиперболы. Точно такая же картина получилась бы, если бы мы исходили, наоборот, из гиперболы в роли Γ . Есть, правда, исключительный вариант, когда Γ — парабола (рис. 2). Вспомогательная сфера и в этом случае вписана в конус. Из-за равенства $FN = nN$, $mP = nP$ расстояния P от вертикальной прямой mP и от точки N различаются на одну и ту же величину FN . Поэтому Γ_1 оказывается параболой,

равной Γ . Каждая из них проходит через фокус другой. На кривых Γ и Γ_1 легко ввести параметризацию. В общем случае в подходящей системе координат

$$x = \tilde{a} \cos \theta, y = \sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2} \sin \theta, z = 0 \quad (\text{кривая } \Gamma);$$

$$x = \tilde{c} \operatorname{ch} \sigma, z = \sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2} \operatorname{sh} \sigma, y = 0 \quad (\text{кривая } \Gamma_1).$$

Соответственно, расстояние между точками той и другой кривой

$$D = \sqrt{(\tilde{a} \cos \theta - \tilde{c} \operatorname{ch} \sigma)^2 + (\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2)(\sin^2 \theta + \operatorname{sh}^2 \sigma)} \\ = \tilde{a} \operatorname{ch} \sigma - \tilde{c} \cos \theta.$$

В специальном, параболическом случае

$$x = \frac{p^2 - y^2}{2p}, \quad z = 0 \quad (\text{кривая } \Gamma);$$

$$x = \frac{z^2}{2p}, \quad y = 0 \quad (\text{кривая } \Gamma_1);$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{p^2 - y^2 - z^2}{2p}\right)^2 + y^2 + z^2} \\ = \frac{y^2 + z^2 + p^2}{2p}.$$

Геометрически очевидно, что величина D представляет собой разность двух радиусов кривизны на одной и той же нормали и поэтому должна выражаться разностью $A - B$, где A зависит от параметра одной кривой, а B — от параметра другой. Всегда можно придерживаться такого порядка наименования этих радиусов кривизны, что

$$A = \tilde{a} \operatorname{ch} \sigma, \quad B = \tilde{c} \cos \theta \quad (7)$$

(общий случай),

$$A = \frac{y'^2 + p^2}{2p}, \quad B = -\frac{y^2}{2p} \quad (8)$$

(специальный, параболический случай, где мы ввели штрихи для отличия от координат на самой поверхности).

2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

На самой поверхности изменениям параметров θ и σ соответствуют некоторые изменения координат. Если оставить θ неизменным, а немного сместить точку на Γ_1 , то угол между двумя нормальными определится по формуле:

$$\cos \eta = \frac{(\tilde{a} \cos \theta - \tilde{c} \operatorname{ch} \sigma)}{(\tilde{a} \operatorname{ch} \sigma - \tilde{c} \cos \theta)[\tilde{a} \operatorname{ch}(\sigma + \delta\sigma) - \tilde{c} \cos \theta]} \\ \times \left([\tilde{a} \cos \theta - \tilde{c} \operatorname{ch}(\sigma + \delta\sigma)] \right. \\ \left. + (\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2) [\sin^2 \theta + \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh}(\sigma + \delta\sigma)] \right).$$

Это значит,

$$\eta \simeq \frac{\sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2}}{\tilde{a} \operatorname{ch} \sigma - \tilde{c} \cos \theta} \delta\sigma. \quad (9)$$

Поскольку радиус кривизны на произвольной поверхности равен $\tilde{a} \operatorname{ch} \sigma + L$, то на поверхности находится элемент длины дуги

$$ds_1 = \frac{\sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2}}{\tilde{a} \operatorname{ch} \sigma - \tilde{c} \cos \theta} (\tilde{a} \operatorname{ch} \sigma + L) d\sigma. \quad (10)$$

Аналогично, если оставлять неподвижной точку на Γ_1 , а на Γ несколько изменить параметр θ , то

$$\eta \simeq \frac{\sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2}}{\tilde{a} \operatorname{ch} \sigma - \tilde{c} \cos \theta} \delta\theta$$

и элемент длины дуги

$$ds_2 = \frac{\sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2}}{\tilde{a} \operatorname{ch} \sigma - \tilde{c} \cos \theta} (\tilde{c} \cos \theta + L) d\theta. \quad (11)$$

При изменении того и другого параметра элемент длины дуги определяется формулой:

$$ds^2 = \frac{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2}{(\tilde{a} \operatorname{ch} \sigma - \tilde{c} \cos \theta)^2} [(\tilde{a} \operatorname{ch} \sigma + L)^2 d\sigma^2 \\ + (\tilde{c} \cos \theta + L)^2 d\theta^2]. \quad (12)$$

Аналогично в специальном случае:

$$ds^2 = \frac{1}{(y'^2 + z'^2 + p^2)} [(z'^2 + p^2) dz'^2 + y'^2 dy'^2]. \quad (13)$$

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вернемся к функциям ψ и δL . Из (10) и (11) получается (локально)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial n_y} = \frac{\tilde{a} \operatorname{ch} \sigma - \tilde{c} \cos \theta}{\sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2}} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \\ \varphi_2 &= \frac{\partial \psi}{\partial n_z} = \frac{\tilde{a} \operatorname{ch} \sigma - \tilde{c} \cos \theta}{\sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2}} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

и аналогично

$$\alpha = \frac{\tilde{a} \operatorname{ch} \sigma - \tilde{c} \cos \theta}{\sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2}} \frac{\partial \delta L}{\partial \theta}, \quad \beta = \frac{\tilde{a} \operatorname{ch} \sigma - \tilde{c} \cos \theta}{\sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2}} \frac{\partial \delta L}{\partial \sigma}.$$

Интегрированием выражения для R_x (21) первой части при $y = z = 0$ получаем на каждой нормали

$$\delta \phi = -\frac{\varphi_1 \alpha}{x - A} - \frac{\varphi_2 \beta}{x - B} + N(\sigma, \theta), \quad (15)$$

где $N(\sigma, \theta)$ — пока неизвестная функция. С учетом этого из (14) следует:

$$\begin{aligned} \nabla\phi\nabla\delta\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\delta\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\delta\phi}{\partial z} \\ &= \frac{(\tilde{a}\operatorname{ch}\sigma - \tilde{c}\cos\theta)^2}{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2} \left(\frac{\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\delta\phi}{\partial\theta}}{(\tilde{a}\operatorname{ch}\sigma + L)^2} + \frac{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma}\frac{\partial\delta\phi}{\partial\sigma}}{(\tilde{c}\cos\theta + L)^2} \right). \end{aligned}$$

Это скалярное произведение должно обращаться в нуль, поскольку во втором варианте первой части другие члены в (5) отсутствуют. В раскрытом виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(L+A)^2} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[(\tilde{a}\operatorname{ch}\sigma - \tilde{c}\cos\theta)^2 \left(\frac{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma}\frac{\partial\delta L}{\partial\sigma}}{L+A} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\delta L}{\partial\theta}}{L+B} \right) + (\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2) N \right] \\ &+ \frac{1}{(L+B)^2} \frac{\partial\phi}{\partial\sigma} \frac{\partial}{\partial\sigma} \left[(\tilde{a}\operatorname{ch}\sigma - \tilde{c}\cos\theta)^2 \left(\frac{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma}\frac{\partial\delta L}{\partial\sigma}}{L+B} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\delta L}{\partial\theta}}{L+B} \right) + (\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2) N \right] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} s &= (\tilde{a}\operatorname{ch}\sigma - \tilde{c}\cos\theta)^2 \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \frac{\partial\delta L}{\partial\theta}, \\ s_1 &= (\tilde{a}\operatorname{ch}\sigma - \tilde{c}\cos\theta)^2 \frac{\partial\phi}{\partial\sigma} \frac{\partial\delta L}{\partial\sigma}, \end{aligned} \quad (17)$$

то члены с $(L+A)^{-3}$, $(L+B)^{-3}$ после приведения (16) к сумме элементарных дробей представляются в виде

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \frac{\partial s_1}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\sigma} \frac{\partial s}{\partial\sigma} = 0. \quad (18)$$

Предполагаем, что $\partial\phi/\partial\theta$ и $\partial\phi/\partial\sigma$ не обращаются в нуль, иначе случай делается частным по отношению к рассматриваемому далее случаю b) второго варианта первой части работы (см. Shamshiev, 2024, с. 155–156). Но тогда s и s_1 — функции только одной переменной: $s(\theta)$ и $s_1(\sigma)$. В (16) остается

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{s'(\theta)}{L+B} + \frac{\tilde{c}s(\theta)\sin\theta}{(L+B)^2} + (\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2) \frac{\partial N}{\partial\theta} \right) \\ &+ \frac{\partial\phi}{\partial\sigma} \frac{\partial}{\partial\sigma} \left(\frac{s_{11}(\sigma)}{L+A} + \frac{\tilde{a}s_1(\sigma)\operatorname{sh}\sigma}{(L+A)^2} + (\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2) \frac{\partial N}{\partial\sigma} \right) = 0 \end{aligned}$$

или после разложения на элементарные дроби:

$$\begin{aligned} &-\frac{s'(\theta)\partial\phi/\partial\theta}{\tilde{a}\operatorname{sh}\sigma - \tilde{c}\cos\theta} + (\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2) \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \frac{\partial N}{\partial\theta} \\ &+ \frac{\tilde{c}s(\theta)\sin\theta\partial\phi/\partial\theta - \tilde{a}s_1(\sigma)\operatorname{sh}\sigma\partial\phi/\partial\sigma}{(\tilde{a}\operatorname{ch}\sigma - \tilde{c}\cos\theta)^2} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &-\frac{s'_1(\sigma)\partial\phi/\partial\sigma}{\tilde{a}\operatorname{sh}\sigma - \tilde{c}\cos\theta} + (\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2) \frac{\partial\phi}{\partial\sigma} \frac{\partial N}{\partial\sigma} \\ &+ \frac{\tilde{c}s(\theta)\sin\theta\partial\phi/\partial\theta - \tilde{a}s_1(\sigma)\operatorname{sh}\sigma\partial\phi/\partial\sigma}{(\tilde{a}\operatorname{ch}\sigma - \tilde{c}\cos\theta)^2} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Последнее уравнение преобразуем к виду

$$\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} : \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\tilde{a}s'(\theta)\operatorname{ch}\sigma - \tilde{c}s'(\theta)\cos\theta - 2\tilde{c}s(\theta)\sin\theta}{\tilde{a}s'_1(\sigma)\operatorname{ch}\sigma - \tilde{c}s'_1(\sigma)\cos\theta - 2\tilde{a}s_1(\sigma)\operatorname{sh}\sigma}. \quad (21)$$

Мы исключаем возможность обращения s или s_1 тождественно в нуль, так как по определению этих функций получалось бы $\varphi_2 = 0$ или $\beta = 0$, что относится к другим случаям. Поэтому соотношение (21) имеет смысл и его можно подставить в (19) или (20) с соответственным последующим сокращением $\partial\phi/\partial\theta$ или $\partial\phi/\partial\sigma$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial\theta} &= \frac{\tilde{c}\sin\theta s'_1(\sigma)s(\theta) + \tilde{a}\operatorname{sh}\sigma s_1(\sigma)s'(\theta)}{2\tilde{a}\operatorname{sh}\sigma s_1(\sigma)(\tilde{a}\operatorname{ch}\sigma - \tilde{c}\cos\theta)} \\ &+ \frac{s'_1(\sigma)[- \tilde{c}\sin\theta s'_1(\sigma)s(\theta) + \tilde{a}\operatorname{sh}\sigma s_1(\sigma)s'(\theta)]}{2\tilde{a}\operatorname{sh}\sigma s_1(\sigma)[(\tilde{a}\operatorname{ch}\sigma - \tilde{c}\cos\theta)s'_1(\sigma) - 2\tilde{a}\operatorname{sh}\sigma s_1(\sigma)]}, \\ \frac{\partial N}{\partial\sigma} &= -\frac{c\sin\theta s'_1(\sigma)s(\theta) + a\operatorname{sh}\sigma s_1(\sigma)s'(\theta)}{2c\sin\theta s(\theta)(\tilde{a}\operatorname{ch}\sigma - c\cos\theta)} \\ &+ \frac{s'(\theta)[- \tilde{c}\sin\theta s'_1(\sigma)s(\theta) - \tilde{a}\operatorname{sh}\sigma s_1(\sigma)s'(\theta)]}{2\tilde{c}\sin\theta s(\theta)[(\tilde{a}\operatorname{ch}\sigma - \tilde{c}\cos\theta)s'(\theta) - 2\tilde{c}\sin\theta s(\theta)]}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Соотношения (22) удобнее переписать в несколько другом виде, используя как аргументы $A = \tilde{a}\operatorname{ch}\sigma$ и $B = \tilde{c}\cos\theta$. Относительно этих аргументов s_1 и s формально представляются как некоторые новые функции: $s_1(\sigma) = S_1(A)$, $s'_1(\sigma) = \tilde{a}S'_1(A)\operatorname{sh}\sigma$, $s(\theta) = S(B)$, $s'(\theta) = -\tilde{c}S'(B)\sin\theta$.

После этой подстановки равенство (22) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial B} &= -\frac{S'_1(A)S(B) - S_1(A)S'(B)}{2S_1(A)(A-B)} \\ &+ \frac{S'_1(A)[S'_1(A)S(B) + S_1(A)S'(B)]}{2S_1(A)[(A-B)S'_1(A) - 2S_1(A)]}, \\ \frac{\partial N}{\partial A} &= -\frac{S'_1(A)S(B) - S_1(A)S'(B)}{2S(B)(A-B)} \\ &- \frac{S'(B)[S'_1(A)S(B) + S_1(A)S'(B)]}{2S(B)[(A-B)S'(B) + 2S(B)]}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Подвергая оба равенства (23) перекрестному дифференцированию, получаем:

$$-\frac{S'_1(A)[(A-B)S''_1(A) - S'_1(A)]}{2S_1(A)[(A-B)S'_1(A) - 2S_1(A)]^2} + \dots = 0, \quad (24)$$

причем в знаменателях невыписанных членов стоят выражения $(A-B)$ или $(A-B)S'(B) + 2S(B)$ в первых степенях или в квадратах, не считая коэффициентов, зависящих только от A или B . Умножаем (24) на

$$[(A-B)S'_1(A) - 2S_1(A)] \times [(A-B)S'_1(B) + 2S(B)]^2 (A-B)^2.$$

В итоге (24) сводится к виду

$$\left[\frac{S(B)}{S'(B)} + \frac{S_1(A)}{S'_1(A)} \right]^3 : \left[A - \frac{2S_1(A)}{S'_1(A)} - B \right] + \dots = 0, \quad (25)$$

причем в знаменателях правой части стоят множителями только функции от A или от B . Кроме того, можно формально ввести новый аргумент:

$$C = A - \frac{2S_1(A)}{S'_1(A)},$$

и тогда должно выполняться тождество

$$\frac{[q(B) - q_1(C)]^3}{C - B} = \sum_{j=1}^n \chi_j(B) \mu_j(C) \quad (26)$$

с некоторым конечным n , причем

$$q(B) = \frac{S(B)}{S'(B)}, \quad q_1(C) = -\frac{S_1(A)}{S'_1(A)},$$

а точный вид функций χ_j и μ_j сейчас не представляет интереса. Приведение к виду (26) становится невозможным только тогда, когда одна из функций — $S_1(A)$ и $S(B)$ — сводится к постоянной или когда C по своей природе постоянно. Последний случай эквивалентен

$$S_1(A) = h(A - C)^2, \quad (27)$$

где h и C — постоянные. Докажем следующее вспомогательное утверждение: тождество (26) относительно двух независимых переменных B и C может выполняться только в том случае, если q и q_1 — рациональные функции, притом одинаковые.

Доказательство начнем со случая постоянства q или q_1 . Тогда после освобождения от знаменателя получается:

$$\sum_{j=1}^n [\chi_j(B) C \mu_j(C) - B \chi_j(B) \mu_j(C)] - (q - q_1)^3 = 0. \quad (28)$$

Очевидно, всегда можно считать число n минимальным, так что между самими функциями χ_j или μ_j нет линейной зависимости. В левой части (28) мы имеем дело с $2n + 1$ попарными произведениями $\chi_j(B) C \mu_j(C)$. Между сомножителями того или другого вида должно быть не менее $n + 1$ линейных зависимостей, то есть с точностью до перестановки ролей B и C должен соблюдаться набор $n + 1$ тождеств

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_{jv} + \beta_{jv} B) \chi_j(B) - h_v f_j(B) = 0, \quad (29)$$

где $\alpha_{jv}, \beta_{jv}, h_v$ — постоянные, $v = 1, 2, \dots, n + 1$, $f_j(B) = [q(B) - q_1]^3$ или тоже является постоянной. Функцию $f_j(B)$ из системы (29) можно исключить, оставив только n уравнений для $\chi_j(B)$. Определитель этой системы не может тождественно обращаться в нуль (иначе некоторые соотношения (29) были бы мнимыми). Поэтому обращаются в нуль сами функции χ_j , что означает обращение в нуль и левой части, то есть $q = q_1 = \text{const}$.

В общем случае непостоянных $q(B)$ и $q_1(B)$ вместо (28) после раскрытия куба разности имеем сумму $2n + 4$ попарных произведений. Опять с точностью до перестановки ролей B и C должно существовать не менее $n + 2$ соотношений

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_{jv} + \beta_{jv} B) \chi_j(B) + u_v (q(B))^3 + v_v (q(B))^2 + w_v q(B) + \xi_v = 0, \quad (v = 1, 2, \dots, n + 2). \quad (30)$$

Если в (30) все u_v и v_v обращаются в нуль, то можно исключить также $q(B)$ и постоянные, уменьшив число уравнений до n , и применить рассуждение предыдущего случая. Поэтому считаем, что q^2 или q^3 фактически присутствуют хотя бы в одном из тождеств (30). Исключим их, сведя число уравнений до n . Оставшаяся система не может отдельно определять $q(B)$, поскольку получилось бы $q(B) = \text{const}$, то есть уже изученный случай. Следовательно, χ_j линейным неоднородным образом выражается через $q(B)$, а именно:

$$x_j(B) = \tau_j(B) q(B) + \eta_j(B). \quad (31)$$

По общим правилам алгебры, коэффициенты τ_j и η_j оказываются рациональными функциями B . Подставив (31) в то из соотношений (30), где присутствует q^2 или q^3 , получаем уравнение для q степени 2 или 3 с рациональными коэффициентами. Таким образом, $q(B)$ — алгебраическая функция. Как всякая алгебраическая функция, она может иметь только конечное число особых точек (плюсов и точек разветвления). То же, в силу (31), справедливо для всех функций $\chi_j(B)$.

В области совместного существования функций $\mu_j(C)$ всегда можно подобрать точку C_0 , не совпадающую с указанными особенностями. При приближении B и C одновременно к C_0 правая часть (26) остается регулярной, а слева знаменатель стремится к нулю. Поэтому и в числителе $q(C_0) = q_1(C_0)$. Поскольку точку C_0 можно свободно передвигать в пределах некоторой области, функции q и q_1 вообще совпадают. Более того, вокруг всякой точки ветвления на плоскости B можно обойти, не меняя C . Тогда для другой ветви $q(B)$ тоже получается совпадение с неизменной $q_1(C)$, так что любые две ветви $q(B)$ просто совпадают, а значит, $q(B)$ — рациональная функция, что и требовалось доказать.

В применении к (25) доказанное вспомогательное утверждение означает, что

$$\frac{S_1(A)}{S'_1(A)} = q \left(A - \frac{2S_1(A)}{S'_1(A)} \right), \quad \frac{S(B)}{S'(B)} = -q(B) \quad (32)$$

с одной и той же рациональной функцией q . Второе соотношение (32), в принципе, можно проинтегрировать как дифференциальное уравнение для $S(B)$, и регулярность будет нарушаться только в точках, где $q(B) = 0$. Функция (27) также, очевидно, регулярна. Наконец, и при постоянстве одной из функций S и S_1 сохраняет силу вывод о невозможности бесконечного числа особых точек у другой функции. Действительно, если $S(B) = \text{const}$, то вместо (25) получаем

$$\frac{\frac{d}{dA} \left(A - \frac{2S_1(A)}{S'_1(A)} \right)}{\left(A - \frac{2S_1(A)}{S'_1(A)} - B \right)} = \sum_{j=1}^n \chi_j(B) \mu_j(C),$$

и рассуждения, аналогичные прежним, показывают, что функция $S_1(A)$, если не постоянна, то имеет вид (27). Из сказанного ясно, что всегда можно найти область совместного существования обеих функций — $S(x)$ и $S_1(x)$. Устремим A и B к одной и той же точке x этой области и обратим внимание на сингулярные члены при составлении условия совместимости:

$$\begin{aligned} & - \frac{S_1(A) \frac{d}{dB} \frac{S'(B)}{S(B)} + S(B) \frac{d}{dA} \frac{S'_1(A)}{S_1(A)}}{A - B} \\ & + \frac{\left(\frac{1}{S_1(A)} + \frac{1}{S(B)} \right) (S'_1(A)S(B) - S_1(A)S'(B))}{(A - B)^2} \\ & + \dots = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставив в (33) $A = x - \varepsilon$, $B = x + \varepsilon$, приравняем нулю коэффициенты при сингулярных членах типа ε^{-1} и ε^{-2} . При этом получаются два варианта:

$$\begin{aligned} 1) & S'_1(x)S(x) - S_1(x)S'(x) = 0, \quad \frac{S'(x)}{S(x)} = \text{const}; \\ 2) & S_1(x) = \pm S(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует, прежде всего, что если одна из функций S и S_1 постоянна, то обязательно постоянна и другая. Квадратичная функция (27) совместна только со вторым вариантом первой части работы (см. Shamshiev, 2024, с. 155–156). При непостоянстве $S(x)$ функции $S(x)/S'(x)$ и $S_1(x)/S'_1(x)$ в любом случае совпадают и (32) можно записать кратко в виде

$$q[A + 2q(A)] = -q(A). \quad (34)$$

Но рациональная функция $q(A)$ может сохранять инвариантность по отношению к замене аргумента A на его рациональную функцию $A + 2q(A)$ только в том случае, если эта последняя функция — линейная или дробно-линейная. (Иначе отображения комплексной плоскости с помощью функций в левой и правой частях (34) давали бы римановы поверхности с разным числом листов.) Если $A + 2q(A)$ — линейная функция, то

$$q(a) = \lambda + \mu A \quad (\lambda, \mu = \text{const})$$

и подстановка в (34) дает $(1 + \mu) = 0$, то есть $q(A) = \lambda - A$ и из (32) следует $S(A) = h(A - \lambda)$.

Точно также ведем расчет для дробно-линейной функции в роли аргумента левой части (34). Тогда

$$q(A) = -\frac{A}{2} + \frac{\tau A - \sigma}{2(A - \delta)}$$

с некоторыми постоянными τ, σ, δ и подстановка в (34) дает $\tau = \delta$ и далее, в силу (32), получается

$$S(A) = h(A^2 - 2\tau A + \sigma). \quad (35)$$

Очевидно, оба случая относятся ко второму варианту первой части работы, а не к первому. Найденные решения проверяются непосредственной подстановкой. Резюмируем. Условие совместимости соотношений (23) соблюдается только в двух случаях:

1. $S(x)$ и $S_1(x)$ — постоянные, вообще говоря, разные.
2. $S(x)$ — многочлен не выше второй степени, $S_1(x) = \pm S(x)$.

5. ЗАВЕРШЕНИЕ ПОСТРОЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА

Однако мы должны найти еще функцию Φ . Формулу (21) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A} : \frac{\partial \Phi}{\partial B} = \frac{(A-B)S'(B) + 2S(B)}{(A-B)S'_1(A) - 2S_1(A)} \times \frac{\tilde{c}^2 - B^2}{A^2 - \tilde{a}^2}.$$

В случае постоянных S и S_1 получаем, что Φ функционально зависит от комбинации

$$T = S \int \frac{dA}{A^2 - \tilde{a}^2} - S_1 \int \frac{dB}{\tilde{c}^2 - B^2}. \quad (36)$$

Однако надо учесть еще соотношения (17), которые в данном случае дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta L}{\partial B} &= \frac{S}{(\tilde{c}^2 - B^2) \frac{\partial T}{\partial B} \Phi} = -\frac{S}{S_1} (\Phi')^{-1} \frac{\partial \delta L}{\partial A} \\ &= \frac{S_1}{(A^2 - \tilde{a}^2) \frac{\partial T}{\partial A} \Phi'} = \frac{S_1}{S} (\Phi')^{-1}, \end{aligned} \quad (37)$$

так что $\Phi(T) = \lambda T + \mu$,

$$\delta L = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{S_1}{S} A - \frac{S}{S_1} B \right) + \text{const.} \quad (38)$$

Для квадратичных функций имеем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A} : \frac{\partial \Phi}{\partial B} = \pm 1, \quad \Phi = \Phi(A \pm B) \quad (39)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta L}{\partial B} &= -\frac{S(B)}{(\tilde{c}^2 - B^2) \Phi'(A \pm B)}, \\ \frac{\partial \delta L}{\partial A} &= -\frac{S(A)}{(A^2 - \tilde{a}^2) \Phi'(A \pm B)}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Опять $\Phi(z) = \lambda z + \mu$ и

$$\delta L = \frac{1}{\lambda} \left[\pm \int \frac{S(B)dB}{\tilde{c}^2 - B^2} + \int \frac{S(A)dA}{A^2 - \tilde{a}^2} \right] + \text{const.} \quad (41)$$

В особом случае (8) из (13) вывод (23) по существу не меняется. Формула (21) приобретает иной, более простой вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A} : \frac{\partial \Phi}{\partial B} = \frac{(A-B)S'(B) + 2S(B)}{(B-B)S'_1(A) - 2S_1(A)} : \frac{B}{\frac{p}{2} - A}.$$

В случае постоянных S и S_1 величина Φ функционально зависит от

$$T = S \int \frac{dA}{A - \frac{p}{2}} - S_1 \int \frac{dB}{B} = S \ln \left(A - \frac{p}{2} \right) - S_1 \ln B$$

и далее верно (37) и (38). Для квадратичных функций имеем (39) и

$$\delta L = \frac{1}{\lambda} \left[\pm \int \frac{S(B)dB}{B} + \int \frac{S(A)dA}{A - \frac{p}{2}} \right] + \text{const.}$$

Определим функцию N . В случае постоянства S и S_1 в (23) сразу получается $\partial N / \partial B = \partial N / \partial A = 0$, так что можно принять $N = 0$ (аддитивная постоянная в $\delta \Phi$ не существенна). В другом случае, когда $S(x)$ и $S_1(x)$ задаются квадратичным выражением (35), находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial A} &= \frac{\partial N}{\partial B} = -h \quad \text{и} \\ N &= -\frac{h(A+B)}{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Наконец, если $S(x)$ совпадает с (35), а S_1 отличается знаком, получается

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial B} &= -\frac{\partial N}{\partial A} = -h \quad \text{и} \\ N &= \frac{h(A-B)}{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Для составления $\delta \Phi$ согласно (15) необходимы еще коэффициенты $\varphi_1 \alpha, \varphi_2 \beta$. В случае постоянства S и S_1 из (17) следует

$$\varphi_1 \alpha = \frac{S}{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2}, \quad \varphi_2 \beta = \frac{S_1}{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2} \quad (44)$$

и в целом из (15) вытекает:

$$\delta \Phi = -\frac{1}{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2} \left(\frac{S}{L+A} + \frac{S_1}{L+B} \right). \quad (45)$$

В другом случае, когда S и S_1 выражаются квадратичными формами, (44) остается в силе, а вместо (45) имеем:

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= -\frac{h}{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2} \left[\frac{B^2 - 2\tau B + \sigma}{L+A} + \frac{A^2 - 2\tau A + \sigma}{L+B} \right] \\ &\quad - \frac{h(A+B)}{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2}, \quad \text{при } S = S_1 \end{aligned} \quad (46)$$

или

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= -\frac{h}{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2} \left[\frac{B^2 - 2\tau B + \sigma}{L+A} - \frac{A^2 - 2\tau A + \sigma}{L+B} \right] \\ &\quad + \frac{L(A-B)}{\tilde{a}^2 - \tilde{c}^2}, \quad \text{при } S = -S_1. \end{aligned} \quad (47)$$

Заметим еще, что конкретный вид функции $\rho(L)$ у нас не играл роли, и эта функция остается произвольной. Инвариантная поверхность в физическом пространстве всегда может быть построена, если знать конкретную $\rho(L)$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы рассмотрели некоторое расширение зоны действия локального интеграла: при удалении на малое расстояние ε в фазовом пространстве от инвариантной гиперповерхности он сохраняет силу с точностью $\varepsilon(0)$. Мы перечислили случаи дальнейшей интегрируемости уравнений движения при наличии локального интеграла в пространственной модели, что позволяет полностью определить поверхности, дающие границы области движения, близкие к сферам. Найденные соответствующие потенциалы с почти сферической симметрией на больших расстояниях r могут представлять интерес в изучении динамики звездных систем.

Проблема локального интеграла близка к достаточно хорошо изученной задаче определения интегральных кривых на торе, так как их всегда можно выразить через угловые моменты (Antonov, 1981). Но в этой работе мы не ставили целью изучение вопроса о регулярности или хаотичности траектории с любыми другими условиями. Она также не связана непосредственно с известной теорией Колмогорова—Арнольда—Мозера, поскольку инвариантные торы, предсказываемые этой теорией, должны выражаться полиномами высокой степени по скоростям или просто бесконечными рядами (Moser, 2021). Однако не исключено, что какие-то отдельные торы допускают приближенное описание и при помощи локального интеграла. Этот вопрос требует дальнейших исследований.

БЛАГОДАРНОСТИ

Эта статья посвящается светлой памяти Вадима Анатольевича Антонова и основана на докладе, представленном на конференции «Современная звездная астрономия», которая проходила в Волгоградском государственном университете 15–19 мая 2023 г. Автор выражает благодарность организаторам этой конференции А. С. Расторгуеву и О. Ю. Малкову, а также ее участникам за

обсуждение результатов, которое позволило существенно улучшить содержание работы.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке гранта FZ-20200929344, выделенного Министерством высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. A. Antonov, Vestnik LGU **19**, 97 (1981).
2. V. A. Antonov and F. T. Shamshiev, Sov. Astron. **36**, 501 (1992).
3. V. A. Antonov and F. T. Shamshiev, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **56** (3), 451 (1993). DOI:10.1007/BF00691813
4. V. A. Antonov and F. T. Shamshiev, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **59** (3), 209 (1994). DOI:10.1007/BF00692872
5. Y. Moser, *KAM theory and problems of sustainability. Vol. 2* (R&C Dynamics, Izhevsk, 2001) [in Russian].
6. F. T. Shamshiev, Astronomical and Astrophysical Transactions **7** (4), 269 (1995). DOI:10.1080/10556799508203273
7. F. T. Shamshiev, in *Proc. VAK-2021 Conf. on Astronomy at the Epoch of Multimessenger Studies, Moscow, Russia, 2021*, Ed. by A. M. Cherepashchuk, N. V. Emelyanov, A. A. Fedorova, et al. (Janus-K, Moscow, 2022), pp. 468–470. DOI:10.51194/VAK2021.2022.1.1.195
8. F. T. Shamshiev, Astrophysical Bulletin **1** (3), 153 (2024). DOI:10.1134/S1990341323600308
9. A. K. Vlasov, *The Course of Higher Mathematics. Vol. I* (LENAND, Moscow, 2021) [in Russian].

Cases of Further Integrability of the Equation of Motion in the Presence of the Local Integral in the Space Model. II

F. T. Shamshiev¹

¹National University of Uzbekistan, Tashkent, 100174 Uzbekistan

A particular case of a local integral, published by Shamshiev in 2024, leads asymptotically to a potential with almost spherical symmetry at large distances r . The $L(x, y, z) = \text{const}$ surfaces, which give the boundaries of the area of motion and are close to spheres, are found.

Keywords: *methods: numerical—stellar dynamics: equation of motion*