

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СПЕЦИАЛЬНАЯ АСТРОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ**

П Р Е П Р И Н Т № 209

З. О. Коркмазова, Р. А. Кочкаров

**АЛГОРИТМЫ С ОЦЕНКАМИ ПОСТРОЕНИЯ
ПОКРЫТИЯ ЭЙЛЕРОВЫМИ ЦИКЛАМИ
НА ПРЕДФРАКТАЛЬНОМ ГРАФЕ**

Нижний Архыз

2005

УДК 519.1

**АЛГОРИТМЫ С ОЦЕНКАМИ ПОСТРОЕНИЯ ПОКРЫТИЯ
ЭЙЛЕРОВЫМИ ЦИКЛАМИ НА ПРЕДФРАКТАЛЬНОМ ГРАФЕ**

З. О. Коркмазова, Р. А. Кочкаров

Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия,
г. Черкесск, Карачаево-Черкесия, Россия, 369000

Аннотация. Настоящая работа посвящена теории фрактальных и предфрактальных графов и многокритериальной оптимизации. В данной работе описываются алгоритмы с оценками построения покрытия циклами на предфрактальном графе.

Ключевые слова: Эйлеров подграф, ребро, n-вершинный граф, эйлеров цикл.

**ALGORITHM WITH ESTIMATES OF BUILDING OF COVERING
BY EULER CYCLES ON PREFRACTAL GRAPH**

Z. O. Korkmazova, R. A. Kochkarov

The paper is dedicated to fractal and prefractal graph theory and multicriteria optimization. In this work we described the algorithms with estimates of building of covering by cycles on prefractal graph.

Keywords: Euler subgraph, edge, n-vertex graph, Euler cycle

В период глобализации экономики многие задачи со структурным хаосом удобно моделировать на фрактальных и предфрактальных графах [1,2]. Так, многие задачи экономического и технического характера большой размерности сводятся к известной задаче Эйлера на фрактальных и предфрактальных графах. В данной работе предлагаются полиномиальные алгоритмы в многокритериальной постановке с оценками решения задачи Эйлера на взвешенном предфрактальном графе .

Пусть дан предфрактальный [1,2] (n,L) -граф $G_L=(V_L,E_L)$, порожденный затравкой [3] $H=(W,Q)$, $|W|=n, |Q|=q$ и каждое ребро $e_{S_r} \in E_L$ взвешено двумя числами a_{ij}^r, b_{ij}^r произвольно из интервала: $a_{ij}^r(e_{S_r}), b_{ij}^r(e_{S_r}) \in [k^{r-1}a, k^{r-1}b]$, где $S_r = 1,2,\dots, qn^{r-1}$ – номер ребра r -го ранга, где $k \leq 1$ – коэффициент подобия.

Покрытием x (n,L) - графа $G_L=(V_L,E_L)$ будем называть такое разбиение ребер, что подграф $S_m=(V_m,E_m)$, $m=1..M$ (M -число подграфов) содержит эйлеров цикл, причем каждое ребро принадлежит только одному из подграфов S_m , $m=1..M$, т.е. $\cap S_m = \emptyset$ по ребрам, а объединение дает исходный предфрактальный (n,L) -граф, т.е. $\cup S_i = G_L=(V_L,E_L)$. Число K назовем типом компоненты S_m , если подграф $S_m=(V_m,E_m)$ содержит K_t разных l -типов ребер $l=1..L$ в S_m . Множество всех покрытий x назовем множеством допустимых решений и обозначим через X .

На множестве допустимых решений $X=X(G_L)=\{x\}$ определим векторную целевую функцию (ВЦФ): $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x), F_5(x), x \in X)$;
 $F_1(x)=|x| \rightarrow \min$, где $|x|$ – число компонент покрытия x ; $F_2(x) = \sum_{t=1}^T K_t \rightarrow \min$, где $T=1..L$, а K_t – число ребер разного ранга компоненты S_m ; $F_3(x) = \sum_{e_{S_r} \in E_m} \frac{a_{ij}^r(e_{S_r})}{|x|} \rightarrow \min$, где $F_3(x)$ – удельный вес по весам a_{ij}^r допустимого по-

крытия; $F_4(x) = \sum_{x \in X} \sum_{e_{sr} \in E_m} \frac{b'_{ij}(s_{s_r})}{|x|} \rightarrow \min$, где $F_4(x)$ – удельный вес по весам b'_{ij}

допустимого покрытия x ; $F_5(x) = \min_{S_m \in x} \max_{v_i \in V_m} \deg v_i \rightarrow \min$.

1. Алгоритм α_1 построения покрытия L -ранговыми циклами

Рассмотрим взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, у которой $|W| = n$, $|Q| = q$.

В начале работы алгоритма α_1 будем предполагать, что на затравке $H = (W, Q)$ существует эйлеров цикл.

Алгоритм α_1 основан на алгоритме выделения эйлерова цикла, предложенного Флэри. На вход алгоритма Флэри подается произвольный взвешенный граф, а на выходе получается эйлеров цикл. Далее алгоритм Флэри будет использоваться как процедура.

Алгоритм α_1

Опишем принцип работы алгоритма α_1 .

Каждая подграф-затравка $z_s^{(L)}$, $s = \overline{1, n^{L-1}}$ рассматривается как отдельно взятый граф. Последовательно на каждой подграф-затравке $z_s^{(L)}$ выделяются эйлеровы циклы C_s . Поиск эйлерова цикла на отдельно взятой подграф-затравке осуществляется с помощью алгоритма Флэри, который используется в алгоритме α_1 в качестве процедуры. Результатом работы алгоритма является покрытие L -ранговыми циклами предфрактального графа G_L .

АЛГОРИТМ α_1

ВХОД: взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$.

ВЫХОД: $C = (V_L, E_C)$.

ШАГ 1. Последовательно для каждой затравки $z_s^{(L)}$, $s = \overline{1, n^{L-1}}$ найти эйлеров цикл C_s , используя процедуру Флэри.

ШАГ 2. На выходе шага 1 получаем n^{L-1} эйлеровых циклов C_s , для каждой затравки $z_s^{(L)}$. Объединяя эйлеровы циклы C_s , получим покрытие L -ранговыми циклами предфрактального графа G_L .

ПРОЦЕДУРА ФЛЭРИ.

ВХОД: взвешенный граф $G = (V, E)$.

ВЫХОД: эйлеров цикл $C = (V, E_C)$. ◀

ТЕОРЕМА 1. Алгоритм α_1 строит покрытие L -ранговыми циклами на предфрактальном (n, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденном затравкой $H = (W, Q)$, $|W| = n$, $|Q| = q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Алгоритм α_1 выделяет последовательно на каждой подграф-затравке L -го ранга $z_s^{(L)}$ эйлеров цикл, используя процедуру Флэри. Все вершины предфрактального графа инцидентны какому-либо ребру подграф-затравки $z_s^{(L)}$. Выделение эйлерова цикла на подграф-затравке $z_s^{(L)}$ означает выделение всех ее вершин.

Выделим на подграф-затравке L -ого ранга $z_1^{(L)}$ эйлеров цикл C_1 . В результате цикл C_1 покрыл n вершин. Далее выделим на второй затравке L -ого ранга $z_2^{(L)}$ эйлеров цикл C_2 , который покрывает еще n вершин. Это покрытие

никак не повлияло на C_1 , так как затравки $z_1^{(L)}$ и $z_2^{(L)}$ являются отдельными, не связанными между собой подграфами.

Тогда, после выделения эйлера цикла $C_{n^{L-1}}$ на последней затравке $z_{n^{L-1}}^{(L)}$, будет покрыто $n^{L-1} \cdot n = n^L$ вершин. Получим, что покрыто все множество вершин предфрактального графа G_L . ◀

ТЕОРЕМА 2. *Вычислительная сложность алгоритма α_1 на предфрактальном (n, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного затравкой $H = (W, Q)$, где $|V_L| = N = n^L$, равна $O(Nn)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгоритм α_1 представляет собой, по существу, многократное выполнение шага 1, т.е. поиск эйлера цикла для каждой подграф-затравки $z_s^{(L)}$, а их n^{L-1} . Шаг 1 потребует выполнения $O(n^2)$ операций на каждой подграф-затравке – столько операций выполняет алгоритм Флэри.

Тогда $O(n^{L-1}n^2) = O(n^L n) = O(Nn)$. Таким образом, вычислительная сложность алгоритма α_1 равна $O(Nn)$. ◀

ТЕОРЕМА 3. *Алгоритм α_1 выделяет покрытие $x_1 = (V_L, E_{x_1})$ на предфрактальном (n, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденном затравкой $H = (W, Q)$, оптимальное по третьему $F_3(x_1)$ критерию, и оцениваемое по первому $\theta^{L-1} \frac{an^L}{2} \leq F_1(x_1) \leq \theta^{L-1} \frac{bn^L}{2}$, второму $F_2(x_1) \leq \frac{n^L}{2}$, четвертому $F_4(x_1) \leq n$ и пятому $F_5(x_1) = n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательством оптимальности по третьему $F_3(x_1)$ критерию служит теорема 1. Поскольку покрытие x_1 состоит из L -ранговых циклов, тогда каждая компонента включает в себя ребра только L -го ранга, и тип компоненты C_m , $m = 1, 2, \dots, M$ равняется единице, то есть третий критерий $F_3(x_1) = 1$. Пятый критерий $F_5(x_1)$ минимизирует число вершин компо-

ненты C_m . Каждая компонента C_m , $m = 1, 2, \dots, M$ представляет собой эйлеров цикл подграф-затравки, тогда пятый критерий $F_5(x_1) = n$.

Критерий $F_1(x_1)$ минимизирует число компонент в покрытии x_1 . Число компонент равняется числу подграф-затравок L -го ранга $z_s^{(L)}$, а их n^{L-1} . Тогда первый критерий оценивается как $F_1(x_1) = n^{L-1}$.

Критерий $F_2(x_1)$ минимизирует удельный вес покрытия x_1 , равный суммарному весу покрытия, поделенному на число компонент в покрытии. В соответствии с правилами взвешивания предфрактального графа каждому его ребру $e^{(l)} \in E_L$ приписано действительное число $w(e^{(l)}) \in (\theta^{l-1}a, \theta^{l-1}b)$, где $l = \overline{1, L}$ – ранг ребра, $a > 0$, и $\theta < \frac{a}{b}$. В покрытие x_1 входят только ребра L -го ранга $e^{(L)}$, веса которых находятся в промежутке $w(e^{(L)}) \in (\theta^{L-1}a, \theta^{L-1}b)$. В худшем случае, когда затравка – полный граф, общее число ребер в данном покрытии равняется $n^{L-1} \cdot n^2 = n^{L+1}$. Тогда оценка по второму критерию следующая $\frac{n^{L+1} \cdot \theta^{L-1}a}{n^{L-1}} \leq F_2(x_1) \leq \frac{n^{L+1} \cdot \theta^{L-1}b}{n^{L-1}}$ или $n^2 \theta^{L-1}a \leq F_2(x_1) \leq n^2 \theta^{L-1}b$.

Четвертый критерий $F_4(x_1)$ минимизирует степень компоненты C_m в покрытии x . Каждая компонента C_m , $m = 1, 2, \dots, M$ представляет собой эйлеров цикл подграф-затравки L -го ранга $z_s^{(L)}$. В худшем случае, если затравка $H = (W, Q)$ – полный граф, четвертый критерий $F_4(x_1) \leq n$. ◀

2. Алгоритм α_2 выделения эйлерова цикла

Рассмотрим взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, $|W| = n$, $|Q| = q$, смежность старых ребер которого сохраняется.

ТЕОРЕМА 4. *Связный неориентированный граф G содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда число вершин нечетной степени равно 0.*

Смысл ее таков, что если в графе G все вершины четной степени, тогда можно выделить эйлеров цикл.

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы предфрактальный (n, L) -граф $G_L = (V_L, E_L)$, смежность старых ребер которого сохраняется, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, содержал эйлеров цикл, достаточно существования эйлерова цикла $H_M = (W, Q_M)$ на самой затравке $H = (W, Q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы на предфрактальном графе существовал эйлеров цикл, необходимо и достаточно выполнение условия теоремы 4, то есть четности степеней всех его вершин.

Рассмотрим процесс порождения предфрактального графа G_L . Граф G_1 представляет собой затравку $H = (W, Q)$, в которой все вершины имеют четную степень, по условию теоремы. На следующем шаге каждая вершина замещается затравкой $H = (W, Q)$, и получается граф G_2 . Смежность старых ребер сохраняется, это означает по сути, что затравка присоединяется к вершинам графа G_1 одной из своих вершин. К общей вершине добавляются ребра затравки, а их четное число, тогда получаем, что к четному числу старых ребер добавляется четное число новых ребер. То есть степень общих вершин графа G_2 – тоже четное число. Остальные "новые" вершины будут инцидентны только своим ребрам, то есть степень вершин не изменится и останется четной. Получаем, что степень всех вершин графа G_2 – четное число.

На следующем шаге заменяются все вершины G_2 затравками $H = (W, Q)$, или по-другому, ко всем вершинам присоединяются затравки $H = (W, Q)$ и получается граф G_3 . Также как и на предыдущем шаге к общим вершинам прибавляется четное число ребер, поскольку вершины затравки имеют четные степени. А новые вершины остаются четными, так как к ним

не присоединяются другие ребра. Таким образом, получаем, что степень всех вершин графа G_3 – также четное число.

Продолжая процесс порождения предфрактального графа, на шаге L вершины графа G_{L-1} замещаются затравками. Полученный предфрактальный граф G_L также будет содержать в себе вершины только четной степени, в силу приведенных ранее рассуждений.

Таким образом, если в предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$ смежность старых ребер сохраняется, а порождающая затравка содержит эйлеров цикл, тогда предфрактальный граф также содержит эйлеров цикл. ◀

Предположим, что выполняется условие теоремы 4, и алгоритм α_2 заведомо выделит эйлеров цикл на предфрактальном графе G_L .

Алгоритм α_2 основан на алгоритме выделения эйлера цикла, предложенном Флэри. На вход алгоритма Флэри подается произвольный взвешенный граф, а на выходе получается эйлеров цикл. Далее алгоритм Флэри будет использоваться как процедура.

Алгоритм α_2

Опишем принцип работы алгоритма α_2 .

Каждая подграф-затравка $z_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ рассматривается как отдельно взятый граф. Последовательно на каждой подграф-затравке $z_s^{(l)}$ выделяются эйлеровы циклы C_m , $m = 1, \dots, \frac{n^L - 1}{n - 1}$. Поиск эйлера цикла на отдельно взятой подграф-затравке осуществляется с помощью алгоритма Флэри, который используется в алгоритме α_2 в качестве процедуры. Результатом работы алгоритма является эйлеров цикл предфрактального графа G_L .

АЛГОРИТМ α_2

ВХОД: взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$.

ВЫХОД: эйлеров цикл $C = (V_L, E_C)$.

ШАГ 1. Последовательно для каждой затравки $z_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$

найти эйлеров цикл C_m , $m = 1, \dots, \frac{n^L - 1}{n - 1}$, используя процедуру Флэри.

ШАГ 2. На выходе шага 1 получаем $\frac{n^L - 1}{n - 1}$ эйлеровых циклов C_m , для каждой затравки $z_s^{(l)}$. Объединяя эйлеровы циклы C_m , получим эйлеров цикл $C = (V_L, E_C)$ предфрактального графа G_L .

ПРОЦЕДУРА ФЛЭРИ.

ВХОД: взвешенный граф $G = (V, E)$.

ВЫХОД: эйлеров цикл $C = (V, E_C)$. ◀

ТЕОРЕМА 6. Алгоритм α_2 выделяет эйлеров цикл $C = (V_L, E_C)$ на предфрактальном (n, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденном затравкой $H = (W, Q)$, $|W| = n$, $|Q| = q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгоритм α_2 на предфрактальном графе G_L выделяет множество эйлеровых циклов $\{C_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{C_s^{(l)}})\}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$.

Предфрактальный граф G_1 представляет собой затравку $H = (W, Q)$. В соответствии с предположением, затравка содержит эйлеров цикл, то есть на графе G_1 можно выделить эйлеров цикл. Используя процедуру Флэри, находим эйлеров цикл $C_1^{(1)}$ на графе G_1 . Граф G_2 получается путем присоединения к вершинам графа G_1 затравок $H = (W, Q)$, поскольку смежность старых ребер сохраняется, или по-другому, замещением вершин затравками. Присоединим к одной из вершин G_1 затравку, т.е. будем рассматривать две под-

граф-затравки $z_1^{(1)}$ и $z_1^{(2)}$. С помощью процедуры Флэри на подграф-затравке $z_1^{(2)}$ выделяем эйлеров цикл $C_1^{(2)}$. Эти две подграф-затравки $z_1^{(1)}$ и $z_1^{(2)}$ соединены через одну вершину. Рассмотрим далее следующий цикл. Движение начинается с вершины, соединяющей две затравки, выделяются все ребра на подграф-затравке $z_1^{(1)}$ по циклу $C_1^{(1)}$, после выделения последнего ребра алгоритм останавливается на начальной вершине. Так как эта вершина общая для обеих подграф-затравок $z_1^{(1)}$ и $z_1^{(2)}$, то продолжаем выделять ребра по циклу $C_1^{(2)}$ и возвращаемся к начальной вершине. Выделенными оказались все ребра подграф-затравок $z_1^{(1)}$ и $z_1^{(2)}$, причем по одному разу. То есть выделен эйлеров цикл.

Теперь рассмотрим случай, когда замещаются две вершины графа G_1 . На двух подграф-затравках $z_1^{(2)}$ и $z_2^{(2)}$ выделяются эйлеровы циклы $C_1^{(2)}$ и $C_2^{(2)}$. Движение начинается с общей вершины графа G_1 и подграф-затравки $z_1^{(2)}$. Выделяется цикл на подграф-затравке $z_1^{(2)}$, алгоритм возвращается к исходной вершине, далее выделяются ребра на графе G_1 (подграф-затравке $z_1^{(1)}$) по циклу $C_1^{(1)}$, до тех пор пока не достигнута вторая общая вершина, то есть пока путь не дошел до подграф-затравки $z_2^{(2)}$. Сначала выделяется эйлеров цикл $C_2^{(2)}$ на ней, а затем продолжается выделение цикла $C_1^{(1)}$. Алгоритм останавливается на первой общей вершине. Выделенными оказались все ребра подграф-затравок $z_1^{(1)}$, $z_1^{(2)}$ и $z_2^{(2)}$, причем по одному разу. То есть выделен эйлеров цикл.

Рассмотрим далее случай, когда замещаются все вершины графа G_1 затравками и получается граф G_2 . На подграф-затравках $z_s^{(2)}$ выделяются эй-

леровы циклы $C_s^{(2)}$, $s = \overline{1, n}$. Используя приведенные ранее рассуждения, проходя по ребрам $z_1^{(1)}$ по циклу $C_1^{(1)}$, выделяем последовательно циклы $C_s^{(2)}$ на подграф-затравках $z_s^{(2)}$. Выделенными оказались все ребра подграф-затравок $z_1^{(1)}$ и $z_s^{(2)}$, $s = \overline{1, n}$, причем по одному разу. То есть выделен эйлеров цикл C_2 предфрактального графа G_2 .

На следующем шаге замещаем все вершины графа G_2 затравками $H = (W, Q)$ и получается граф G_3 . На подграф-затравках второго и третьего ранга $z_{s_1}^{(2)}$ и $z_{s_2}^{(3)}$ выделяются эйлеровы циклы $C_{s_1}^{(2)}$, $s_1 = \overline{1, n}$ и $C_{s_2}^{(3)}$, $s_2 = \overline{1, n^2}$. Проходя по ребрам $z_1^{(1)}$ по циклу $C_1^{(1)}$, выделяем последовательно циклы $C_{s_1}^{(2)}$ на подграф-затравках $z_{s_1}^{(2)}$, при этом когда алгоритм доходит до затравок третьего ранга $z_{s_2}^{(3)}$, на них также выделяются циклы $C_{s_2}^{(3)}$. Выделенными оказались все ребра подграф-затравок $z_1^{(1)}$, $z_{s_1}^{(2)}$ и $z_{s_2}^{(3)}$, $s_1 = \overline{1, n}$, $s_2 = \overline{1, n^2}$, причем по одному разу. То есть выделен эйлеров цикл C_3 предфрактального графа G_3 .

Продолжая процесс замещения вершин затравками, получаем предфрактальные графы G_4, G_5, \dots, G_L . Для которых находим эйлеровы циклы, используя приведенные ранее рассуждения. Алгоритм выделения эйлерова цикла на предфрактальном графе G_L является рекуррентным.

На шаге $L-1$ все вершины графа G_{L-1} замещаются затравками $H = (W, Q)$, в результате чего получается граф G_L . На подграф-затравках $z_s^{(l)}$ выделяются эйлеровы циклы $C_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$. Алгоритм начинает свою работу с одной из вершин инцидентных самому старому ребру первого ранга. Проходя по ребрам $z_1^{(1)}$ по циклу $C_1^{(1)}$, выделяются циклы на подграф-

затравках $z_s^{(l)}$, последовательно от ранга $l = 2$ до $l = L$ (рис.1). То есть, если алгоритм встречает ребро большего ранга, по сравнению с текущим ребром, тогда он переходит на подграф-затравку большего ранга, и выделяет там цикл. Выделив цикл на подграф-затравке самого большого ранга, алгоритм возвращается на предыдущую подграф-затравку.

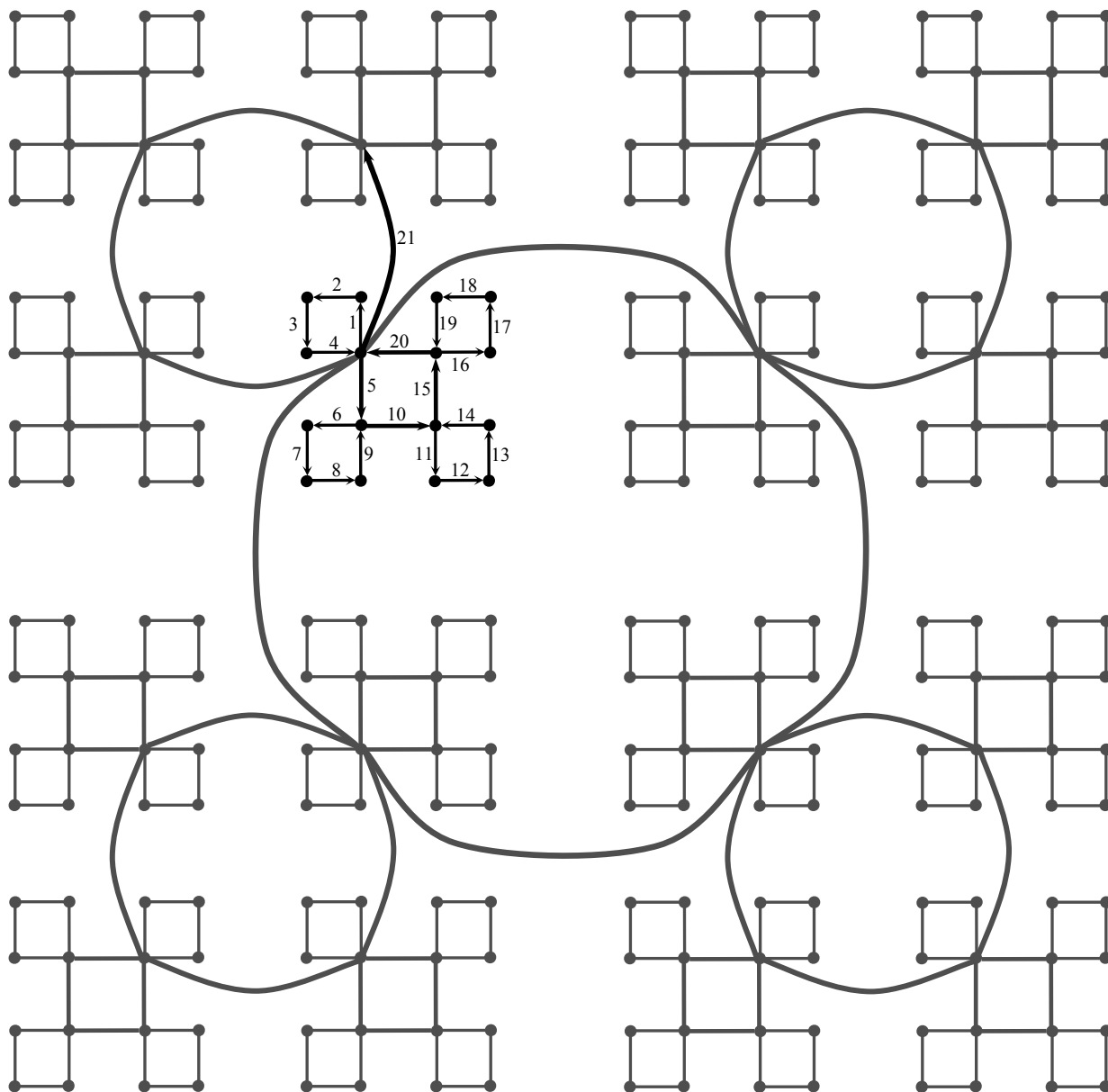


Рис. 1. Выделение эйлерова цикла на предфрактальном графе.

Таким образом, алгоритм α_2 выделяет на предфрактальном графе G_L множество эйлеровых циклов $C_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$, которые в сумме дают эйлеров цикл всего предфрактального графа. ◀

ТЕОРЕМА 7. *Вычислительная сложность алгоритма α_2 на предфрактальном (n, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного затравкой $H = (W, Q)$, где $|V_L| = N = n^L$, равна $O(Nn^2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгоритм α_2 представляет собой, по существу, многократное выполнение шага 1, т.е. поиск эйлерова цикла для каждой подграф-затравки $z_s^{(l)}$, а их $\frac{n^L - 1}{n - 1}$. Шаг 1 потребует выполнения $O(n^2)$ операций на каждой подграф-затравке – столько операций выполняет процедура Флэри.

Тогда $O\left(\frac{n^L - 1}{n - 1} n^2\right) \leq \frac{n^L}{n - 1} n^2 = \frac{n^{L+2}}{n - 1} \leq n^{L+2} = O(n^L n^2) = O(Nn^2)$. Таким

образом, вычислительная сложность алгоритма α_2 равна $O(Nn^2)$. ◀

ПРИМЕЧАНИЕ 1. *Сравнив вычислительную сложность алгоритма Флэри с вычислительной сложностью алгоритма α_2 на предфрактальном графе G_L , получим: $O(N^2) > O(Nn^2)$. Вычислительная сложность алгоритма α_2 меньше вычислительной сложности алгоритма Флэри в n^{L-2} раз.*

ТЕОРЕМА 8. *Алгоритм α_2 выделяет покрытие $x_2 = (V_L, E_{x_2})$ на предфрактальном (n, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденном затравкой $H = (W, Q)$, оптимальное по первому $F_1(x_2)$ критерию, и оцениваемое по*

второму
$$\frac{an(n-1)}{2} \cdot \frac{(n\theta)^L - 1}{n\theta - 1} \leq F_2(x_2) \leq \frac{bn(n-1)}{2} \cdot \frac{(n\theta)^L - 1}{n\theta - 1},$$
 третьему

критерию $F_3(x_2) = L$, *четвертому* $F_4(x_2) \leq \frac{Ln(n-1)}{2}$ *и пятому* $F_5(x_2) = N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательством оптимальности по первому $F_1(x_2)$ критерию служит теорема 6. Критерий $F_1(x_2)$ минимизирует число компонент в покрытии x_2 . На выходе алгоритма α_2 получаем эйлеров цикл предфрактального графа G_L , то есть в покрытии x_2 присутствует только одна компонента, что означает $F_1(x_2) = 1$ – критерий достигает своего минимально возможного значения.

Критерий $F_2(x_2)$ минимизирует удельный вес покрытия x_2 , равный суммарному весу покрытия, поделенному на число компонент в покрытии. В соответствии с правилами взвешивания предфрактального графа, каждому его ребру $e^{(l)} \in E_L$ приписано действительное число $w(e^{(l)}) \in (\theta^{l-1}a, \theta^{l-1}b)$, где $l = \overline{1, L}$ – ранг ребра, $a > 0$, и $\theta < \frac{a}{b}$. Покрытие x_2 состоит из одной ком-

поненты, в которую входят все ребра предфрактального графа G_L . Рассмотрим худший случай, когда затравка – полный граф. Тогда оценка по второму критерию следующая:

$$\frac{n(n-1)}{2} \sum_{l=1}^L n^l \theta^{l-1} a \leq F_2(x_2) \leq \frac{n(n-1)}{2} \sum_{l=1}^L n^l \theta^{l-1} b \quad \text{или}$$

$$\frac{an(n-1)}{2} \cdot \frac{(n\theta)^L - 1}{n\theta - 1} \leq F_2(x_2) \leq \frac{bn(n-1)}{2} \cdot \frac{(n\theta)^L - 1}{n\theta - 1}.$$

Критерий $F_3(x_2)$ минимизирует типы компонент в покрытии. Поскольку покрытие x_2 состоит из одного эйлерова цикла, который включает в себя ребра всех L рангов, то тип единственной компоненты C_1 равняется L , то есть третий критерий $F_3(x_2) = L$.

Четвертый критерий $F_4(x_2)$ минимизирует степень компонент в покрытии. Для оценки четвертого критерия предположим наихудший случай, когда порождающая затравка $H = (W, Q)$, $|W| = n$. Поскольку смежность старых ребер сохраняется, то на каждом шаге $l = \overline{1, L}$ к самой старой вершине

будет добавляться по $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер. Тогда оценка по четвертому критерию

$$F_4(x_2) \leq \frac{Ln(n-1)}{2}.$$

Поскольку в покрытии одна единственная компонента, представляющая эйлеров цикл, тогда в эту компоненту входят все вершины предфрактального графа G_L , а критерий оценивается $F_5(x_2) = N = n^L$. ◀

ТЕОРЕМА 9. Алгоритм α_2 выделяет покрытие $x_2 = (V_L, E_{x_2})$ на фрактальном (n, L) -графе $G = (V, E)$, порожденном затравкой $H = (W, Q)$, оцениваемое по второму критерию

$$\frac{an(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{1-n\theta} \leq F_2(x_2) \leq \frac{bn(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{1-n\theta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае если коэффициент подобия $\theta < \frac{1}{n}$, критерий

$F_2(x_2)$ оценивается следующим образом. При $L \rightarrow \infty$, $\frac{(n\theta)^L - 1}{n\theta - 1} \rightarrow \frac{1}{1 - n\theta}$, то

$$\text{есть } \frac{an(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{1-n\theta} \leq F_2(x_2) \leq \frac{bn(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{1-n\theta}.$$

3. Алгоритм α_3 выделения i -смешанных циклов

Рассмотрим взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, $|W| = n$, $|Q| = q$, смежность старых ребер которого сохраняется.

Предположим, что на затравке $H = (W, Q)$ существует эйлеров цикл.

Алгоритм α_3 основан на алгоритме выделения эйлерова цикла, предложенном Флэри. На вход алгоритма Флэри подается произвольный взве-

шенный граф, а на выходе получается эйлеров цикл. Далее алгоритм Флэри будет использоваться как процедура.

Алгоритм α_3

Опишем принцип работы алгоритма α_3 .

Алгоритм α_3 выделяет i -смешанный цикл, тип которого равняется $i \in [1, \dots, L]$.

Подграф-затравки $z_{s_1}^{(L)}, z_{s_2}^{(L-1)}, \dots, z_{s_i}^{(L-i)}$, $s_1 = \overline{1, n^{L-1}}, s_2 = \overline{1, n^{L-2}}, \dots, s_i = \overline{1, n^{L-1-i}}$ рассматриваются как отдельно взятые графы. Последовательно на каждой подграф-затравке выделяются эйлеровы циклы C_s . Поиск эйлерова цикла на отдельно взятой подграф-затравке осуществляется с помощью алгоритма Флэри, который используется в алгоритме α_3 в качестве процедуры. Результатом работы алгоритма является покрытие i -смешанными циклами предфрактального графа G_L .

АЛГОРИТМ α_3

ВХОД: взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$.

ВЫХОД: $C = (V_L, E_C)$.

ШАГ 1. Последовательно для каждой затравки $z_{s_1}^{(L)}, z_{s_2}^{(L-1)}, \dots, z_{s_i}^{(L-i+1)}$, $s_1 = \overline{1, n^{L-1}}, s_2 = \overline{1, n^{L-2}}, \dots, s_i = \overline{1, n^{L-i}}$ найти эйлеров цикл C_s , используя процедуру Флэри.

ШАГ 2. На выходе шага 1 получаем n^{L-i} i -смешанных циклов, для каждой затравки $z_{s_1}^{(L)}, z_{s_2}^{(L-1)}, \dots, z_{s_i}^{(L-i+1)}$. Объединяя эти циклы, получим покрытие i -смешанными циклами предфрактального графа G_L .

ПРОЦЕДУРА ФЛЭРИ.

ВХОД: взвешенный граф $G = (V, E)$.

ВЫХОД: эйлеров цикл $C = (V, E_C)$. ◀

ТЕОРЕМА 10. Алгоритм α_3 строит покрытие i -смешанными циклами предфрактального (n, L) -графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного затравкой $H = (W, Q)$, $|W| = n$, $|Q| = q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Для случая $i = 1$ алгоритм α_3 является частным случаем алгоритма α_1 . Алгоритм выделяет последовательно на каждой подграф-затравке L -го ранга $z_s^{(L)}$, $s = \overline{1, n^{L-1}}$ эйлеров цикл, используя процедуру Флэри. В соответствии с теоремой 1 алгоритм α_3 строит покрытие L -ранговыми циклами.

Когда $i = 2$, алгоритм выделяет последовательно на каждой подграф-затравке L -го и $(L - 1)$ -го ранга $z_{s_1}^{(L)}$ и $z_{s_2}^{(L-1)}$ эйлеровы циклы $C_{s_1}^{(L)}$ и $C_{s_2}^{(L-1)}$, $s_1 = \overline{1, n^{L-1}}$, $s_2 = \overline{1, n^{L-2}}$.

Так как смежность старых ребер сохраняется, циклы $C_{s_1}^{(L)}$ и $C_{s_2}^{(L-1)}$ образуют n^{L-2} связных компонент. Пользуясь рассуждениями теоремы 3.6, получаем, что на шаге $(L - 1)$ замещения вершин затравками, новые затравки присоединяются к вершинам подграф-затравок $z_{s_2}^{(L-1)}$. В теореме 6. доказано, что в результате такого присоединения циклов $C_{s_1}^{(L)}$ к циклам $C_{s_2}^{(L-1)}$ образуются также циклы. А поскольку вновь созданные циклы состоят из ребер L -го и $(L - 1)$ -го рангов, то они являются 2-смешанными циклами $C_{s'}^i$, $s' = \overline{1, n^{L-2}}$.

Таким образом, в случае $i = L - 1$ алгоритм выделяет последовательно на каждой подграф-затравке $L, L - 1, \dots, 2$ ранга $z_{s_1}^{(L)}, z_{s_2}^{(L-1)}, \dots, z_{s_{L-1}}^{(2)}$ эйлеровы циклы $C_{s_1}^{(L)}, C_{s_2}^{(L-1)}, \dots, C_{s_{L-1}}^{(2)}$, где $s_1 = \overline{1, n^{L-1}}, s_2 = \overline{1, n^{L-2}}, \dots, s_{L-1} = \overline{1, n}$. Так как

смежность старых ребер сохраняется, циклы $C_{s_1}^{(L)}, C_{s_2}^{(L-1)}, \dots, C_{s_{L-1}}^{(2)}$ образуют n связных компонент, которые являются $(L-1)$ -смешанными циклами $C_{s''}^i$, $s'' = \overline{1, n}$.

Случай $i = L$ представляет собой алгоритм α_2 , когда последовательно для каждой затравки $z_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ выделяется эйлеров цикл C_m , $m = 1, \dots, \frac{n^L - 1}{n - 1}$. Полученный эйлеров цикл предфрактального графа G_L является также L -смешанным циклом C_1^i . ◀

ТЕОРЕМА 11. Алгоритм α_3 выделяет покрытие $x_3 = (V_L, E_{x_3})$ на предфрактальном (n, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденном затравкой $H = (W, Q)$, оцениваемое по первому критерию $F_1(x_3) = n^{L-i}$, по второму $\frac{n(n-1)}{2} \sum_{l=L-i+1}^L n^l \theta^{l-1} a \leq F_2(x_3) \leq \frac{n(n-1)}{2} \sum_{l=L-i+1}^L n^l \theta^{l-1} b$, третьему $F_3(x_3) = i$, четвертому $F_4(x_3) \leq \frac{in(n-1)}{2}$ и пятому $F_5(x_3) = n^i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Критерий $F_1(x_3)$ минимизирует число компонент в покрытии x_3 . В теореме 10 показано, что для каждого $i = 1, \dots, L$ алгоритм выделяет определенное число связных компонент, то есть первый критерий оценивается как $F_1(x_3) = n^{L-i}$.

Критерий $F_2(x_3)$ минимизирует удельный вес покрытия x_3 , равный суммарному весу покрытия, поделенному на число компонент в покрытии. В соответствии с правилами взвешивания предфрактального графа каждому его ребру $e^{(l)} \in E_L$ приписано действительное число $w(e^{(l)}) \in (\theta^{l-1}a, \theta^{l-1}b)$, где $l = \overline{1, L}$ – ранг ребра, $a > 0$, и $\theta < \frac{a}{b}$. Покрытие x_3 состоит из n^{L-i} компонент, в которые входят ребра $L, L-1, \dots, L-i+1$ рангов предфрактального графа G_L .

Рассмотрим худший случай, когда затравка – полный граф. Тогда оценка по второму критерию следующая:

$$\frac{n(n-1)}{2} \sum_{l=L-i+1}^L n^l \theta^{l-1} a \leq F_2(x_3) \leq \frac{n(n-1)}{2} \sum_{l=L-i+1}^L n^l \theta^{l-1} b.$$

Критерий $F_3(x_3)$ минимизирует типы компонент в покрытии. Поскольку покрытие x_3 состоит из i -смешанных циклов, то тип всех n^{L-i} компонент равняется i , то есть третий критерий $F_3(x_3) = i$.

Четвертый критерий $F_4(x_3)$ минимизирует степень компонент в покрытии. Для оценки четвертого критерия предположим наихудший случай, когда порождающая затравка $H = (W, Q)$, $|W| = n$ – полный граф. Поскольку смежность старых ребер сохраняется, то на каждом шаге $l = \overline{L-i+1, L}$ к самой старой вершине будет добавляться по $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер. Тогда оценка по четвертому критерию $F_4(x_3) \leq \frac{in(n-1)}{2}$.

Пятый критерий минимизирует число вершин компоненты C_m , $m = n^{L-i}$. В случае $i = 1$ покрытие состоит из n^{L-1} компонент, которые представляют подграф затравки L -го ранга $z_s^{(L)}$, $s = \overline{1, n^{L-1}}$, то есть число вершин компоненты равно числу вершин затравки n . В случае $i = 2$ покрытие состоит из n^{L-2} компонент, которые представляют подграф затравки $(L-1)$ -го ранга $z_{s_2}^{(L-1)}$ и присоединенные к ним соответствующие затравки L -го ранга $z_{s_1}^{(L)}$, то есть число вершин компонент равно n^2 . Если $i = L$ алгоритм α_3 представляет собой частный случай алгоритма α_2 , и число вершин компоненты равно n^L . Таким образом, для произвольного i число вершин компоненты оценивается следующим образом – $F_5(x_3) = n^i$. ◀

4. Алгоритм α_4 выделения эйлерова подграфа

Рассмотрим взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, $|W| = n$, $|Q| = q$, смежность старых ребер которого сохраняется.

Предположим, что на затравке $H = (W, Q)$ не существует эйлерова цикла, но можно выделить эйлеров подграф $H' = (W, Q')$, включающий все вершины затравки.

Алгоритм α_4 использует процедуру выделения эйлерова подграфа указанного типа. На вход процедуры подается произвольный взвешенный граф, а на выходе получается эйлеров подграф.

Алгоритм α_4

Опишем принцип работы алгоритма α_4 .

Каждая подграф-затравка $z_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ рассматривается как отдельно взятый граф. Последовательно на каждой подграф-затравке $z_s^{(l)}$ выделяются эйлеровы подграфы C_m , $m = 1, \dots, \frac{n^L - 1}{n - 1}$. Поиск эйлерова подграфа на отдельно взятой подграф-затравке осуществляется с помощью алгоритма выделения эйлерова подграфа (ВЭП), который используется в алгоритме α_4 в качестве процедуры. Результатом работы алгоритма является эйлеров подграф предфрактального графа G_L .

АЛГОРИТМ α_4

ВХОД: взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$.

ВЫХОД: эйлеров подграф $C = (V_L, E_C)$.

ШАГ 1. Последовательно для каждой затравки $z_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ найти эйлеров подграф C_m , $m = 1, \dots, \frac{n^L - 1}{n - 1}$, используя процедуру ВЭП.

ШАГ 2. На выходе шага 1 получаем $\frac{n^L - 1}{n - 1}$ эйлеровых подграфов C_m , для каждой затравки $z_s^{(l)}$. Объединяя эйлеровы подграфы C_m получим эйлеров подграф $C = (V_L, E_C)$ предфрактального графа G_L .

ПРОЦЕДУРА ВЭП.

ВХОД: взвешенный граф $G = (V, E)$.

ВЫХОД: эйлеров подграф $C = (V, E_C)$. ◀

ТЕОРЕМА 12. Алгоритм α_4 выделяет эйлеров подграф $C = (V_L, E_C)$ на предфрактальном (n, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденном затравкой $H = (W, Q)$, $|W| = n$, $|Q| = q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство является конструктивным и проводится аналогично теореме 3.6.

Алгоритм α_4 на предфрактальном графе G_L выделяет множество эйлеровых подграфов $\{C_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{C_s^{(l)}})\}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$.

Предфрактальный граф G_1 представляет собой затравку $H = (W, Q)$. В соответствии с предположением, затравка содержит эйлеров подграф, включающий все вершины, то есть на графе G_1 можно выделить эйлеров подграф данного типа. Используя процедуру ВЭП, выделяется эйлеров подграф $C_1^{(1)}$ на графе G_1 . Граф G_2 получается путем присоединения к вершинам графа G_1 затравок $H = (W, Q)$, поскольку смежность старых ребер сохраняется. Присоединим к одной из вершин G_1 затравку, т.е. будем рассматривать две подграф-затравки $z_1^{(1)}$ и $z_1^{(2)}$. С помощью процедуры ВЭП на подграф-

затравке $z_1^{(2)}$ выделяем эйлеров цикл $C_1^{(2)}$. Эти две подграф-затравки $z_1^{(1)}$ и $z_1^{(2)}$ соединены через одну вершину. Рассмотрим далее следующий цикл. Движение начинается с вершины, соединяющей две затравки, выделяются ребра на подграф-затравке $z_1^{(1)}$ по циклу $C_1^{(1)}$, после выделения последнего ребра алгоритм останавливается на начальной вершине. Так как эта вершина общая для обеих подграф-затравок $z_1^{(1)}$ и $z_1^{(2)}$, то продолжаем выделять ребра по циклу $C_1^{(2)}$ и возвращаемся к начальной вершине. Выделенная структура является циклом, то есть выделен эйлеров подграф.

Теперь рассмотрим случай, когда замещаются две вершины графа G_1 . На двух подграф-затравках $z_1^{(2)}$ и $z_2^{(2)}$ выделяются эйлеровы подграфы $C_1^{(2)}$ и $C_2^{(2)}$. Движение начинается с общей вершины графа G_1 и подграф-затравки $z_1^{(2)}$. Выделяется эйлеров подграф на подграф-затравке $z_1^{(2)}$, алгоритм возвращается к исходной вершине, далее выделяются ребра на графе G_1 (подграф-затравке $z_1^{(1)}$) по циклу $C_1^{(1)}$, до тех пор пока не достигнута вторая общая вершина, то есть пока путь не дошел до подграф-затравки $z_2^{(2)}$. Сначала выделяется эйлеров подграф $C_2^{(2)}$ на ней, а затем продолжается выделение цикла $C_1^{(1)}$. Алгоритм останавливается на первой общей вершине. Выделенная структура является циклом, то есть выделен эйлеров подграф.

Рассмотрим далее случай, когда замещаются все вершины графа G_1 затравками и получается граф G_2 . На подграф-затравках $z_s^{(2)}$ выделяются эйлеровы подграфы $C_s^{(2)}$, $s = \overline{1, n}$. Используя приведенные ранее рассуждения, проходя по ребрам $z_1^{(1)}$ по циклу $C_1^{(1)}$, выделяем последовательно циклы $C_s^{(2)}$

на подграф-затравках $z_s^{(2)}$. Выделенная структура является циклом, то есть выделен эйлеров подграф C_2 предфрактального графа G_2 .

На следующем шаге замещаем все вершины графа G_2 затравками $H = (W, Q)$ и получается граф G_3 . На подграф-затравках второго и третьего ранга $z_{s_1}^{(2)}$ и $z_{s_2}^{(3)}$ выделяются эйлеровы подграфы $C_{s_1}^{(2)}$, $s_1 = \overline{1, n}$ и $C_{s_2}^{(3)}$, $s_2 = \overline{1, n^2}$. Проходя по ребрам $z_1^{(1)}$ по циклу $C_1^{(1)}$, выделяем последовательно циклы $C_{s_1}^{(2)}$ на подграф-затравках $z_{s_1}^{(2)}$, при этом когда алгоритм доходит до затравок третьего ранга $z_{s_2}^{(3)}$, на них также выделяются циклы $C_{s_2}^{(3)}$. Выделенными оказались часть ребер и все вершины подграф-затравок $z_1^{(1)}$, $z_{s_1}^{(2)}$ и $z_{s_2}^{(3)}$, $s_1 = \overline{1, n}$, $s_2 = \overline{1, n^2}$, причем по одному разу. То есть выделен эйлеров подграф C_3 предфрактального графа G_3 .

Продолжая процесс замещения вершин затравками, получаем предфрактальные графы G_4, G_5, \dots, G_L , для которых находим эйлеровы подграфы, используя приведенные ранее рассуждения. Алгоритм выделения эйлерова подграфа на предфрактальном графе G_L является рекуррентным.

На шаге $L-1$ все вершины графа G_{L-1} замещаются затравками $H = (W, Q)$, в результате чего получается граф G_L . На подграф-затравках $z_s^{(l)}$ выделяются эйлеровы подграфы $C_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$. Алгоритм начинает свою работу с одной из вершин, инцидентных самому старому ребру первого ранга. Проходя по ребрам $z_1^{(1)}$ цикла $C_1^{(1)}$, выделяются циклы на подграф-затравках $z_s^{(l)}$, последовательно от ранга $l = 2$ до $l = L$ (рис.1). То есть, если алгоритм встречает ребро большего ранга, по сравнению с текущим ребром, он переходит на подграф-затравку большего ранга, и выделяет

там эйлеров подграф. Выделив эйлеров подграф на подграф-затравке самого большего ранга, алгоритм возвращается на предыдущую подграф-затравку.

Таким образом, алгоритм α_4 выделяет на предфрактальном графе G_L множество эйлеровых подграфов $C_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$, которые в сумме дают эйлеров подграф всего предфрактального графа. ◀

ТЕОРЕМА 13. *Вычислительная сложность алгоритма α_2 на предфрактальном (n, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного затравкой $H = (W, Q)$, где $|V_L| = N = n^L$, равна $O(Nn^2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгоритм α_2 представляет собой, по существу многократное выполнение шага 1, т.е. поиск эйлерова цикла для каждой подграф-затравки $z_s^{(l)}$, а их $\frac{n^L - 1}{n - 1}$. Шаг 1 потребует выполнения $O(n^2)$ операций на каждой подграф-затравке – столько операций выполняет процедура Флэри.

Тогда $O\left(\frac{n^L - 1}{n - 1} n^2\right) \leq \frac{n^L}{n - 1} n^2 = \frac{n^{L+2}}{n - 1} \leq n^{L+2} = O(n^L n^2) = O(Nn^2)$. Таким

образом, вычислительная сложность алгоритма α_2 равна $O(Nn^2)$. ◀

ТЕОРЕМА 14. *Алгоритм α_4 выделяет покрытие $x_4 = (V_L, E_{x_4})$ на предфрактальном (n, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденном затравкой $H = (W, Q)$, оптимальное по первому $F_1(x_4)$ критерию, и оцениваемое по*

второму $\frac{an(n-1)}{2} \cdot \frac{(n\theta)^L - 1}{n\theta - 1} \leq F_2(x_4) \leq \frac{bn(n-1)}{2} \cdot \frac{(n\theta)^L - 1}{n\theta - 1}$, третьему

$F_3(x_4) = L$, четвертому $F_4(x_4) \leq \frac{Ln(n-1)}{2}$ и пятому $F_5(x_4) = N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательством оптимальности по первому $F_1(x_4)$ критерию служит теорема 12. Критерий $F_1(x_4)$ минимизирует число компонент в покрытии x_4 . На выходе алгоритма α_4 получаем эйлеров подграф

предфрактального графа G_L , то есть в покрытии x_4 присутствует только одна компонента, что означает $F_1(x_4) = 1$ – критерий достигает своего минимально возможного значения.

Критерий $F_2(x_4)$ минимизирует удельный вес покрытия x_4 , равный суммарному весу покрытия, поделенному на число компонент в покрытии. В соответствии с правилами взвешивания предфрактального графа, каждому его ребру $e^{(l)} \in E_L$ приписано действительное число $w(e^{(l)}) \in (\theta^{l-1}a, \theta^{l-1}b)$, где $l = \overline{1, L}$ – ранг ребра, $a > 0$, и $\theta < \frac{a}{b}$. Покрытие x_4 состоит из одной ком-

поненты, в которую входят ребра разных рангов предфрактального графа G_L . Рассмотрим наихудший случай, когда затравка – полный граф и выделяются все ребра. Тогда оценка по второму критерию следующая:

$$\frac{n(n-1)}{2} \sum_{l=1}^L n^l \theta^{l-1} a \leq F_2(x_4) \leq \frac{n(n-1)}{2} \sum_{l=1}^L n^l \theta^{l-1} b \quad \text{или}$$

$$\frac{an(n-1)}{2} \cdot \frac{(n\theta)^L - 1}{n\theta - 1} \leq F_2(x_4) \leq \frac{bn(n-1)}{2} \cdot \frac{(n\theta)^L - 1}{n\theta - 1}.$$

Критерий $F_3(x_4)$ минимизирует типы компонент в покрытии. Поскольку покрытие x_4 состоит из одного эйлерова подграфа, включающего в себя ребра всех L рангов, то тип единственной компоненты C_1 равняется L , то есть третий критерий $F_3(x_4) = L$.

Четвертый критерий $F_4(x_4)$ минимизирует степень компонент в покрытии. Для оценки четвертого критерия предположим наихудший случай, когда порождающая затравка $H = (W, Q)$, $|W| = n$ – полный граф. Поскольку смежность старых ребер сохраняется, то на каждом шаге $l = \overline{1, L}$ к самой ста-

рой вершине будет добавляться по $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер. Тогда оценка по четвертому критерию $F_4(x_4) \leq \frac{Ln(n-1)}{2}$.

Поскольку ранее было определено, что эйлеров подграф включает все вершины, а в покрытии одна единственная компонента, представляющая эйлеров подграф, тогда в эту компоненту входят все вершины предфрактального графа G_L , а критерий оценивается $F_5(x_4) = N = n^L$. ◀

ЛИТЕРАТУРА

- Кочкаров А.М.*, 1998, Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз: САО РАН
- Кочкаров А.М., Перепелица В.А., Сергеева Л.Н.* Фрактальные графы и их размерность
- Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.*, 1990, Лекции по теории графов.– М.: Наука
- Харари Ф.*, 1973, Теория графов. М.: Мир
- Емеличев В.А., Перепелица В.А.*, 1994, Сложность дискретных многокритериальных задач . Дискретная математика. . Т. 6, вып. 1. С .3 – 33.
- Сергиенко И.В., Перепелица В.А.*, 1987, К проблеме нахождения множеств альтернатив в дискретных многокритериальных задачах . Кибернетика. № 5. С. 85 – 93
- Кочкаров А.М.*, 1998, Алгоритмические вопросы теории фрактальных графов . Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н. Черкесск: КЧТИ
- Кристофидес Н.*, 1978, Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир
- Майника Э.* 1981, Алгоритмы оптимизации на графах и сетях. М.: Мир

Коркмазова З.О., 2004, Алгоритм выделения максимального эйлерового предфрактального подграфа. Тез. докл. V научно-практической конференции “От фундаментальной науки – к решению прикладных задач современности”. Черкесск, КЧГТА, С.89

Коркмазова З.О., 2004, Параллельный алгоритм вычисления задачи Эйлера на предфрактальных графах. Черкесск, Деп. в ВИНТИ № 1730-B2004

З. О. Коркмазова, Р. М. Кочкаров

АЛГОРИТМЫ С ОЦЕНКАМИ ПОСТРОЕНИЯ ПОКРЫТИЯ ЭЙЛЕРОВЫМИ
ЦИКЛАМИ НА ПРЕДФРАКТАЛЬНОМ ГРАФЕ

Работа поступила в печать 5 сентября 2005 г.

Уч.изд.л.- 1.2

Специальная астрофизическая обсерватория РАН